

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

E.A.P. DE MATEMÁTICA

**Existencia de soluciones para un modelo espacial
ecológico de competencia depredador presa con *Cross
Diffusion***

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciada en Matemática

AUTOR

Rocio Marilyn Caja Rivera

Lima – Perú

2012

EXISTENCIA DE SOLUCIONES PARA UN MODELO ESPACIAL ECOLÓGICO DE COMPETENCIA DEPREDADOR PRESA CON CROSS DIFFUSION

ROCÍO MARILYN CAJA RIVERA

Tesis presentada a Consideración del Cuerpo Docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, como parte de los requisitos para obtener el Título Profesional de Licenciada en Matemática.

Aprobada por :

Dr. Alfonso Pérez Salvatierra - UNMSM
Presidente

Dra. María Natividad Zegarra Garay - UNMSM
Miembro

Dr. Raúl Moises Izaguirre Maguiña - UNMSM
Miembro Asesor

LIMA - PERÚ

ABRIL - 2012

Ficha Catalográfica

Rocío Marilyn Caja Rivera

**Existencia de Soluciones para un Modelo Espacial Ecológico
de Competencia Depredador Presa con Cross Diffusion.(Lima)2012.
VII, 74p, 29.7 cm (UNMSM, Licenciada, Matemática, 2012).**

Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

Facultad de Ciencias Matemáticas 1. Matemática

I. UNMSM/FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Dedicatoria

A mi madre **Humberta**, a mi padre **Víctor Raúl**, a mi hermano **Raúl Alberto**
y a **ti**.

Rocío Marilyn

Agradecimientos

A Dios, por permitirme realizar esta investigación, inspirarme e iluminarme.

A mis padres y a mi hermano por su apoyo, comprensión y estimulación, en mis actividades académicas.

Al Doctor Raúl Moisés Izaguirre Maguiña por haber aceptado ser mi asesor y colaborar en este interesante y desafiante proyecto de tesis. Ha sido una fortuna laborar con él y aprender sus excelentes sesiones de clases en las aulas de la facultad de Ciencias Matemáticas.

A la Doctora Roxana López Cruz y al Doctor Alfonso Pérez Salvatierra por su apoyo incondicional y motivación en las distintas actividades que llenaron en mi conocimientos necesarios para la realización de este trabajo.

A los Doctores Reinhard Racke, Vilmos Komornik, Phan Van Tuoc, Alfredo Villanueva, Hugo Fernandez Sare, Shenghu Xu quienes me apoyaron incondicionalmente y a la Doctora María Zegarra Garay por la revisión de esta Tesis.

Finalmente, a todos los seres que encontré en mi camino y me motivaron a ser Matemática.

RESUMEN

EXISTENCIA DE SOLUCIONES PARA UN MODELO ESPACIAL ECOLÓGICO DE COMPETENCIA DEPREDADOR PRESA CON CROSS DIFFUSION

ROCÍO MARILYN CAJA RIVERA

ABRIL - 2012

Orientador: Dr. Raúl Moises Izaguirre Maguiña
Título obtenido: Licenciada en Matemática

Vincularemos Matemática y Ecología usando un sistema no lineal parabólico fuertemente acoplado el cual se presenta en dinámicas poblacionales. Aquí demostramos la existencia de soluciones clásicas globales cuando la dimensión del espacio es $n < 10$. Con ciertas condiciones en los coeficientes de las funciones de reacción, la convergencia de soluciones es establecida por el sistema mediante una función de Liapunov.

PALABRAS CLAVES:

DIFUSIÓN CRUZADA
ESPACIOS DE BANACH
ESPACIOS DE HÖLDER
ESPACIOS DE SOBOLEV
ESTIMATIVAS

ABSTRACT

EXISTENCE OF SOLUTIONS FOR AN ECOLOGICAL SPATIAL MODEL OF COMPETENCE PREY PREDATOR WITH CROSS DIFFUSION

ROCÍO MARILYN CAJA RIVERA

APRIL - 2012

Advisor: Dr. Raúl Moises Izaguirre Maguiña
Degree: Licenciada en Matemática

We vinctuate Mathematics and Ecology using a nonlinear parabolic strong coupled system which is presented in population dynamics. Here we demonstrate the existence of classical global solutions when the space dimension is $n < 10$. Under certain conditions on the coefficients of the reaction functions, the convergence of solutions is established for the system with large diffusion by constructing a Liapunov function.

KEY WORDS:

CROSS DIFFUSION
BANACH SPACES
HÖLDER SPACES
SOBOLEV SPACES
ESTIMATES

Índice general

Índice general VII

Lista de Abreviaciones X

1. **Introducción** 1

1.1. **Preliminares** 7

1.1.1. **Definiciones Básicas** 7

1.1.2. **Principio del Máximo de Hopf** 9

1.1.3. **Espacios Normados** 10

1.1.4. **Espacios de Banach** 10

1.1.5. **Espacios de Hölder** 11

1.1.6. **Espacios de Sobolev** 16

1.1.7. **Lemas Previos** 17

2. **Estimativas** 27

2.1. L^r - **Estimativas para v** 27

3. **Demostración del Teorema Principal** 36

3.1. **Demostración del Teorema 1.0.2** 36

4. **Estabilidad** 41

4.1. **Definición de la Estabilidad** 41

4.2.	Estabilidad según Lyapunov	42
4.3.	Teorema de Estabilidad según Lyapunov para un sistema estacionario.	43
4.4.	Teorema de Estabilidad según Lyapunov para un sistema no estacionario.	45
4.5.	Discusión de la Estabilidad	48
4.6.	Gráficos del sistema cross diffusion para n=1	51
4.7.	Gráficos del sistema cross diffusion para n=2	53
5.	Conclusiones	61
A.	APÉNDICE	62
A.1.	Fórmula de Green	62
A.2.	Lema de Comparación	62
A.3.	Lema	63
A.4.	Teorema 9.1	65
A.5.	Lema 4.1	67
A.6.	Teorema 10.1	67
A.7.	Lema 3.3	69

A.8. Teorema 5.3	70
Bibliografía	71

Lista de Abreviaciones

Ω	omega
\mathbb{R}^n	espacio euclidiano n dimensional
$\Omega \subset \mathbb{R}^n$	Ω subconjunto abierto de \mathbb{R}^n
$\partial\Omega$	frontera suave de Ω
$\overline{\Omega}$	cerradura de omega (compacto)
$L^p(\Omega)$	es el espacio de todas las u medibles en Ω y $\int_{\Omega} u ^p dx < \infty$, $1 \leq p < \infty$
$C(\overline{\Omega})$	es el espacio de las funciones continuas en $\overline{\Omega}$
$C_c(\Omega)$	es el espacio de las funciones continuas con soporte compacto en Ω
$C^k(\Omega)$	es el espacio de las funciones k veces continuamente diferenciables con soporte compacto en Ω
$C_c^k(\Omega)$	es el espacio de las funciones en $C^k(\Omega) \cap C_c(\Omega)$
$C^\infty(\Omega)$	es el espacio de las funciones infinitamente diferenciables en Ω
$C_c^\infty(\Omega)$	es el espacio de las funciones en $C^\infty(\Omega) \cap C_c(\Omega) = \mathfrak{D}(\Omega)$
$W_p^1(\Omega)$	es el espacio de Sobolev donde $u \in L^p(\Omega)$; $\exists g_i \in L^p(\Omega)$ tales que $\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} g_i \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$
$W_2^{1,0}(Q_T)$	es el espacio de Hilbert donde $W_2^{1,0}(Q_T) = W_0^{1,2}(Q_T) = H_0^1(Q_T)$
∇u	es llamado el gradiente de u y lo denotamos por $\nabla u = Du = u_{x_k}$
Q_T	es llamado el cilindro $\Omega \times (0, T)$
S_T	es la superficie lateral de Q_T
Γ_T	es $S_T \cup \{(x, t) : x \in \Omega, t = 0\}$

Capítulo 1

Introducción

Ecología y Matemática han sido vinculados con el modelo de competencia de Lotka-Volterra. Este se conoce usando ecuaciones diferenciales ordinarias, la pregunta es qué sucede usando las ecuaciones en derivadas parciales. La respuesta empezó con muchas investigaciones en fenómenos de segregación espacial de especies interactuantes. Shigesada, Kawasaki y Teramoto [1] propusieron un modelo de competencia en derivadas parciales en 1979. Ellos analizan en su investigación la formación de patrones de distribución de dos poblaciones de especies competitivas en ambientes heterogéneos. En su formulación matemática sustentan una fuerza dispersiva no lineal debido a las interferencias mutuas de individuos y una función de las posibles consecuencias ambientales, esto se presenta como una versión conductual de la teoría fenomenológica de Morisita en “Densidad Ambiental” Ver [26]. El análisis Matemático de los efectos de estas fuerzas dispersivas dan como resultado la heterogeneidad del ambiente. Los movimientos de dispersión no lineal plantean una segregación espacial de las poblaciones de dos especies depredador presa y a la vez competitivas. Además existe la posibilidad que esta segregación espacial actúe

a estabilizar la coexistencia de estas dos especies, mitigando la competencia interespecífica. Desde allí se han establecido muchos resultados en diversas literaturas; ver por ejemplo [2,9]. Los efectos de dispersión, segregación en dinámica de poblaciones, ecología y evolución son temas de investigación actual que han despertado curiosidad a muchos investigadores, estos fenómenos presentados están siendo estudiados desde varios puntos de vista. En los recientes años los sistemas de cross diffusion están llamando la atención en el campo de las ecuaciones elípticas y parabólicas fuertemente acopladas. En esta investigación estudiaremos los sistemas de cross-diffusion con funciones de reacción tipo depredador presa ya que existen pocos resultados especialmente en los problemas de *steady-state* en sistemas elípticos. Ver [10,11,12,13,14]

Cross-Diffusion es la difusión de un tipo de especie debido a la presencia de otra. Este fenómeno es abundante en la naturaleza; por ejemplo, los sistemas depredador presa, donde el depredador se difunde hacia regiones donde la presa es más abundante. Por otro lado, la presa trata de evitar a los depredadores escapándose de ellos. Otra área de aplicación es en epidemias donde individuos susceptibles tratan de evitar individuos infectados. Otras consideraciones del movimiento dirigido de los individuos en cada especie resulta de introducir el cross diffusion y los términos de difusión propia en los sistemas depredador presa. En esta investigación presentada, estudiaremos los siguientes sistemas de cross - diffusion, con reacciones tipo

depredador presa.

$$\begin{aligned}
u_t - \Delta[(d_1 + \alpha_{11}u + \alpha_{12}v)u] &= u(a_1 - b_1u - c_1v) \quad \text{en } \Omega \times [0, \infty), \\
v_t - \Delta[(d_2 + \alpha_{21}u + \alpha_{22}v)v] &= v(a_2 + b_2u - c_2v) \quad \text{en } \Omega \times [0, \infty), \\
\partial_\eta u = \partial_\eta v &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega \times [0, \infty), \\
u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, \quad v(x, 0) &= v_0(x) \geq 0 \quad \text{en } \Omega,
\end{aligned} \tag{1.0.1}$$

donde, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$ con $n \in N$) es un dominio acotado, ecológicamente es el habitat o parche donde las especies interactúan, con frontera suave $\partial\Omega$ llamado en términos ecológicos borde, $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ es el operador laplaciano, este nos indica el movimiento browniano de los individuos en el habitat Ω , η es el vector normal unitario de salida en la frontera $\partial\Omega$, $\partial_\eta = \partial/\partial\eta$, denota la derivada direccional a lo largo de la normal exterior en la $\partial\Omega$. Las condiciones de frontera homogenea de Neumann significan que no hay migración atravezando la frontera $\partial\Omega$. Por otro lado α_{ij} son constantes no negativas dadas para $i, j = 1, 2$. Tenemos que d_i , b_i , c_i ($i = 1, 2$) y a_1 son constantes positivas solamente a_2 debe ser no positiva, a_1 , a_2 son tasas de crecimiento intrínseco, b_1 y c_2 son coeficientes de interacción intraespecífica, b_2 y c_1 son coeficientes de interacción interespecífica. En el sistema (1.1.1), u y v son funciones no negativas las cuales representan las densidades de población de las especies depredador presa, respectivamente, d_1 y d_2 son las tasas de difusión aleatoria de las dos especies, α_{11} y α_{22} son tasas propias de difusión de cada una de las especies, y α_{12} y α_{21} son las llamadas tasas de cross - diffusion. Cuando $\alpha_{ij} = 0$

$(i, j = 1, 2)$, el sistema es el conocido modelo depredador presa de Lotka-Volterra. Para más detalles en la información biológica, revisar la siguiente referencia [1, 18]. La existencia local (en tiempo) de soluciones en el sistema (1.0.1) fue establecido por Amann en una serie de importantes papers [15, 16, 17]. Su resultado puede ser resumido como sigue:

Teorema 1.0.1. *Sean $d_i, b_i, c_i (i = 1, 2)$, a_1 constantes positivas, $\alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{11}, \alpha_{22}$ constantes no negativas, y $a_2 < 0$. Supongamos que u_0, v_0 están en $W_p^1(\Omega)$ para algún $p > n$. Entonces (1.0.1) tiene una única solución suave nonegativa. $u(x, t), v(x, t)$ en*

$$C([0, T], W_p^1(\Omega)) \bigcap C^\infty((0, T), C^\infty(\Omega))$$

con tiempo T de existencia máxima. Además, si la solución (u, v) satisface la estimativa

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u(\cdot, t)\|_{W_p^1(\Omega)} < \infty \quad y \quad \sup_{0 \leq t \leq T} \|v(\cdot, t)\|_{W_p^1(\Omega)} < \infty,$$

entonces $T = \infty$.

Sin embargo, poco es conocido acerca de la existencia global de soluciones para (1.0.1). En 2006, Shim [18] demostró la existencia de soluciones globales a (1.0.1) en dos casos: Caso(A) $n = 1, d_1 = d_2$ y $\alpha_{11} = \alpha_{22} = 0$; Caso(B) $n = 1, 0 < \alpha_{21} < 8\alpha_{11}$ y $0 < \alpha_{12} < 8\alpha_{22}$.

En [19] el autor considera el caso cuando $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{22} > 0$ y $\alpha_{21} = 0$ para el sistema (1.0.1), y estableció la existencia de soluciones con $n = 1$.

Vamos a demostrar la existencia de soluciones globales para los siguientes sistemas (llamémosle el sistema (1.0.1) para $\alpha_{12} = 0$)

$$\begin{aligned}
u_t - \Delta[(d_1 + \alpha_{11}u)u] &= u(a_1 - b_1u - c_1v) \quad \text{en } \Omega \times [0, \infty), \\
v_t - \Delta[(d_2 + \alpha_{21}u + \alpha_{22}v)v] &= v(a_2 + b_2u - c_2v) \quad \text{en } \Omega \times [0, \infty), \\
\partial_\eta u = \partial_\eta v &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega \times [0, \infty), \\
u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, \quad v(x, 0) &= v_0(x) \geq 0 \quad \text{en } \Omega.
\end{aligned} \tag{1.0.2}$$

Esta tesis maneja ideas de dos papers [6] y [9] que se ocupan de sistemas de cross-diffusion con reacciones tipo competencia. Debido a la diferencia en las funciones de reacción. Por lo tanto, con el fin de obtener la estimativa L^p de v , tenemos que estimar el término uv^p . También obtendremos resultados en la estabilidad asintótica de la solución global de (1.0.2) si los coeficientes de difusión son suficientemente grandes por el importante Lema 5.1 de [21]. Resumamos nuestros resultados en los siguientes teoremas:

Teorema 1.0.2. *Con las mismas hipótesis del teorema anterior, $\alpha_{12} = 0$, $\alpha_{22} > 0$. Supongamos que, $u_0 \geq 0$, $v_0 \geq 0$ satisfacen la condición de frontera cero de Neumann y pertenecen a $C^{2+\lambda}(\overline{\Omega})$ para algún $\lambda > 0$. Entonces (1.0.2) posee una única solución no negativa $u, v \in C^{2+\lambda, \frac{2+\lambda}{2}}(\overline{\Omega} \times [0, \infty))$ en cualquiera de los siguientes casos (i) $\alpha_{11} = 0$ o (ii) $\alpha_{11} > 0$ y $n < 10$.*

Teorema 1.0.3. *Suponga que todas las condiciones en el Teorema 1.0.2 son satis-*

fechas. Supongamos también que

$$-\frac{a_1 b_2}{b_1 c_2} < \frac{a_2}{c_2} < \frac{a_1}{c_1}, \quad (1.0.3)$$

$$4\rho\bar{u} \bar{v}d_1d_2 > m^2(\bar{v}\alpha_{21})^2. \quad (1.0.4)$$

Entonces (1.0.2) tiene el único punto positivo de equilibrio (\bar{u}, \bar{v}) el cual es de estabilidad asintótica global, donde m es la constante positiva en el Lema 1.1.1 (independiente de d_1, d_2), $\rho = (b_2c_1 + 2b_1c_2)b_2^{-2}$ y

$$(\bar{u}, \bar{v}) = \left(\frac{a_1c_2 - a_2c_1}{b_1c_2 + b_2c_1}, \frac{a_2b_1 + a_1b_2}{b_1c_2 + b_2c_1} \right).$$

Esta tesis esta organizada como sigue, en este primer capítulo presentamos algunas definiciones básicas, recogemos algunos buenos resultados y demostramos algunos lemas que son necesarios para los siguientes capítulos. En el capítulo 2 analizaremos las L^r estimativas de la solución v de (1.0.2). En el capítulo 3, daremos una demostración del teorema principal 1.0.2. En el capítulo 4 demostraremos el teorema 1.0.3, analizaremos la estabilidad del sistema, y simularemos el comportamiento de las soluciones para $n=1,2$ usando el software Mathematica de la Wolfram.

1.1. Preliminares

1.1.1. Definiciones Básicas

Definición 1. \mathbb{R}^n es llamado el espacio euclídeo n dimensional, donde $x = (x_1, \dots, x_n)$ es un punto arbitrario en él.

Definición 2. $Q_T = \Omega \times [0, T)$, es el cilindro donde T es un número positivo fijo. Es decir Q_T es el conjunto de puntos (x, t) de \mathbb{R}^{n+1} donde $x \in \Omega$, $t \in [0, T)$.

Definición 3. Sea $p \in \mathbb{R}$, con $1 < p < \infty$; establecemos

$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \mapsto \mathbb{R}; f \text{ es medible y } |f|^p \in L^1(\Omega)\}$ con norma

$$\|f\|_{L^p} = \|f\|_p = \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}$$

Definición 4. Sea $p = \infty$; establecemos

$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \mapsto \mathbb{R}; f \text{ medible tal que } |f(x)| \leq C \text{ casi siempre en } \Omega\}$

para algun C , con norma

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \|f\|_\infty = \inf\{C; |f(x)| \leq C \text{ casi siempre en } \Omega\} = \text{varaimax}_\Omega |f|$$

Definición 5. Sea $L^{p,q}(Q_T)$ es el espacio de las funciones medibles en Q_T con una norma finita

$$\|u\|_{L^{p,q}(Q_T)} = \left(\int_0^T \left(\int_{\Omega} |u(x, t)|^p dx \right)^{\frac{q}{p}} dt \right)^{1/q},$$

donde $p \geq 1$ y $q \geq 1$ $L^p(Q_T) := L^{p,p}(Q_T)$,

Definición 6. El espacio de Sobolev $W_p^1(\Omega)$ se define por :

$$W_p^1(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \exists g_1, g_2, \dots, g_n \in L^p(\Omega) \text{ tales que } \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} g_i \varphi$$

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \}$$

Se pone

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$$

Para $u \in W_p^1(\Omega)$ tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i \text{ y } \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$$

con norma

$$\|u\|_{W_p^1(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}$$

Definición 7. Se define el espacio de Banach $W_p^{2l,l}(Q_T)$ para l integral ($p \geq 1$)

cuyos elementos están en $L^p(Q_T)$ con derivada generalizada de la forma $D_t^r D_x^s$ para cualquier r y s satisfaciendo la desigualdad $2r + s \leq 2l$.

con norma

$$\|u\|_{W_p^{2l,l}} = \sum_{j=0}^{2l} \sum_{2r+s=j} \|D_t^r D_x^s u\|_{L^p(Q_T)}$$

Para $l = 1$ tenemos

Sea $u \in W_p^{2,1}(Q_T)$ significa que $u, u_t, u_{x_i}, u_{x_i x_j}$, están en $L^p(Q_T)$ para $i, j = 1, 2, \dots, n$

con norma

$$\|u\|_{W_p^{2,1}(Q_T)} := \|u\|_{L^p(Q_T)} + \|u_t\|_{L^p(Q_T)} + \|\nabla u\|_{L^p(Q_T)} + \|\nabla^2 u\|_{L^p(Q_T)},$$

Definición 8. $W_2^{1,0}(Q_T)$ es el espacio de Hilbert con producto escalar

$$\langle u, v \rangle_{W_2^{1,0}(Q_T)} = \int_{Q_T} (uv + u_{x_k} v_{x_k}) dx dt$$

donde

$$u_{x_k} = \sum_{i=1}^k \frac{\partial u}{\partial x_i} e_i \text{ y } v_{x_k} = \sum_{i=1}^k \frac{\partial v}{\partial x_i} e_i$$

Definición 9. $V_2(Q_T)$ es el espacio de Banach consistiendo de todos los elementos de $W_2^{1,0}(Q_T)$ teniendo una norma finita

$$\|u\|_{V_2(Q_T)} := \sup_{0 \leq t \leq T} \|u(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u(x, t)\|_{L^2(Q_T)}.$$

Definición 10. $V_2^{1,0}(Q_T)$ es el espacio de Banach consistiendo de todos los elementos de $V_2(Q_T)$ que son continuos en t en la norma $L^2(\Omega)$, con norma

$$\|u\|_{V_2(Q_T)} := \max_{0 \leq t \leq T} \|u(x, t)\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u(x, t)\|_{L^2(Q_T)}.$$

1.1.2. Principio del Máximo de Hopf

Sea $u = u(x)$, $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ una función C^2 , la cual satisface la desigualdad diferencial.

$$Lu = \sum_{i,j} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \geq 0 \quad (1.1.1)$$

en un dominio abierto Ω donde la matriz simétrica $a_{ij} = a_{ij}(x)$ es localmente uniforme definida positiva en Ω y los coeficiente a_{ij} , $b_i = b_i(x)$ son localmente acotados.

Si u toma su máximo valor M en Ω entonces $u \equiv M$

1.1.3. Espacios Normados

Definición 11. Sea X un espacio vectorial sobre un cuerpo \mathbb{K} , (\mathbb{R} ó \mathbb{C}). Una norma en X es una función $\|\cdot\| : X \mapsto \mathbb{K}$ tal que:

- $\|x\| \geq 0$, para todo $x \in X$
- $\|x\| = 0$ si y solamente si $x = 0$
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ para todo $x \in X$, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo $x, y \in X$

Se dice que $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio Normado.

1.1.4. Espacios de Banach

Definición 12. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado. Si X es un espacio normado completo respecto a la norma $\|\cdot\|$ se dice que es un espacio de Banach.

Un espacio normado es completo si toda sucesión de Cauchy es convergente.

1.1.5. Espacios de Hölder

Definición 13. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto. Una función $u : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ es llamada Lipschitz continua si

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|$$

para alguna constante C y todo x, y en Ω .

Definición 14. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto. Una función $u : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ es llamada Hölder continua con exponente γ si

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^\gamma$$

para alguna constante C y todo x, y en Ω .

Definición 15. Si $u : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ es acotada y continua con norma

$$\|u\|_{C(\bar{\Omega})} := \sup_{x \in \Omega} |u(x)|$$

para alguna constante C y todo x, y en Ω .

Definición 16. La seminorma γ -ésima de Hölder de $u : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ es

$$[u]_{C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})} := \sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\gamma} \right\}$$

y la norma γ -ésima norma de Hölder es

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} := \|u\|_{C(\overline{\Omega})} + [u]_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})}$$

Definición 17. El espacio de Hölder

$$C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})$$

consiste de todas las funciones $C^k(\overline{\Omega})$ para el cual la norma

$$\|u\|_{C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{C^\gamma(\overline{\Omega})} + \sum_{|\alpha|=k} [D^\alpha u]_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})}$$

es finita.

Teorema 1.1.1. El espacio de las funciones $C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})$ es un espacio de Banach.

Demostración Ver [24]

Observación: El espacio $C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})$ consiste de aquellas funciones u las cuales son k -veces continuamente diferenciables y cuyas k -ésimas derivadas parciales son acotadas y Hölder continuas con exponente γ .

Ejemplo : $C^{0,\gamma}(\Omega)$ es un espacio de Banach

En efecto, sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $C^{0,\gamma}(\Omega)$. La sucesión (f_n) es también de Cauchy por la norma del supremo, luego existe una función acotada continua f tal que $\|f_n - f\|_{C^0(\Omega)} \mapsto 0$ cuando $n \rightarrow \infty$

Mostraremos que:

$$\sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ x \neq y}} \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\gamma} \right\} < \infty$$

Dado $\epsilon > 0$ entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \geq N$

$$\sup_{\substack{x, y \in \Omega \\ x \neq y}} \left\{ \frac{|f_n(x) - f_m(x) - (f_n(y) - f_m(y))|}{|x - y|^\gamma} \right\} < \epsilon$$

debido a que (f_n) es una suceción respecto a la norma $\|\cdot\|_{C^{0,\gamma}(\Omega)}$. Para cada par $x, y \in \Omega$ con $x \neq y$ podemos pasar al límite $m \mapsto \infty$ y obtenemos

$$\left\{ \frac{|f_n(x) - f(x) - (f_n(y) - f(y))|}{|x - y|^\gamma} \right\} \leq \epsilon$$

lo cual implica

$$\left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\gamma} \right\} \leq \epsilon + \left\{ \frac{|f_n(x) - f_n(y)|}{|x - y|^\gamma} \right\}$$

luego $f \in C^{0,\gamma}(\Omega)$, y $\|f - f_n\|_{C^{0,\gamma}(\Omega)} \mapsto 0$ cuando $n \mapsto \infty$

Proposición 1.1.1. (*Desigualdad de Young*)

Si a, b son números reales no negativos entonces

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

siempre que

$$1 < p, q < \infty \quad y \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Demostración: Desde que la función logarítmica es cóncava creciente en $(0, \infty)$

tenemos que :

$$\log(ab) = \frac{1}{p} \log a^p + \frac{1}{q} \log b^q \leq \log\left(\frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q\right)$$

entonces

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Proposición 1.1.2. (*Desigualdad de Hölder*).

Sea $1 \leq p \leq \infty$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Supongamos que $f \in L^p$, $g \in L^q$ entonces $fg \in L^1$ y

$$\int |fg| \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Demostración: La conclusión para $p = 1$ o $p = \infty$ es obvia veamos para

$1 < p < \infty$.

Usamos la desigualdad de Young

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad \forall a \geq 0 \quad \forall b \geq 0$$

luego tenemos

$$|f(x)g(x)| \leq \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{q}|g(x)|^q \quad \text{casi siempre } x \in \Omega$$

fg es medible y su valor absoluto está dominado por funciones integrables luego fg está en L^1 y

$$\int |fg| \leq \frac{1}{p}\|f\|_p^p + \frac{1}{q}\|g\|_q^q$$

reemplazando f por λf ($\lambda > 0$) en la ecuación anterior tenemos

$$\int |fg| \leq \frac{\lambda^{p-1}}{p}\|f\|_p^p + \frac{1}{\lambda q}\|g\|_q^q$$

elegimos

$$\lambda = \|f\|_p^{-1} \|g\|_q^{\frac{q}{p}}$$

reemplazamos en la ecuación anterior y obtenemos

$$\int |fg| \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Proposición 1.1.3. (*Desigualdad de Minkowski*).

Si $p \geq 1$ y $f, g \in L^p(\Omega)$ entonces

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Demostración Ver [25]

1.1.6. Espacios de Sobolev

Definición 18. Sea m un entero no negativo y sea p un número real con $1 \leq p \leq \infty$.

Definimos el espacio de Sobolev

$$W_p^m(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \forall \alpha \text{ con } |\alpha| \leq m \exists g_\alpha \in L^p(\Omega) \text{ talque } \int_\Omega u D^\alpha \varphi = (-1)^\alpha \int_\Omega g_\alpha \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)\} \quad (1.1.2)$$

Denotamos

$$D^\alpha u = g_\alpha$$

con norma

$$\|u\|_{W_p^m(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}$$

Observaciones :

- Si $p = 2$, usualmente escribimos

$$H^m(\Omega) = W_2^m(\Omega) \quad m = 0, 1, \dots$$

$H^m(\Omega)$ es un espacio de Hilbert. Notar que $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$

- Un multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ es una n-upla con $\alpha_i \geq 0$ entero no negativo;

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i \quad y \quad D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}$$

Definición 19. Sea $(u_k)_{k=1}^\infty$, $u \in W_p^m(\Omega)$. Decimos que u_k converge fuerte a u en $W_p^m(\Omega)$ escribimos

$$u_k \rightarrow u \quad \text{en} \quad W_p^m(\Omega)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - u\| = 0$$

1.1.7. Lemas Previos

Lema 1.1.1. Sean $u, v \in C([0, T], W_p^1(\Omega)) \cap C^\infty((0, T), C^\infty(\Omega))$ soluciones de (1.0.2) en $[0, T]$. Entonces $0 \leq u \leq m$ y $v \geq 0$ en Q_T , donde $m = \max\{\frac{a_1}{b_1}, \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}\}$.

Demostración. Usamos la siguiente propiedad

$$\nabla^2(fg) = (\nabla^2 f)g + 2(\nabla f) \cdot (\nabla g) + f(\nabla^2 g) \quad (1.1.3)$$

donde $\Delta f = \nabla^2 f$ luego en la primera ecuación de (1.0.2) tenemos que

$$\begin{aligned} \Delta[(d_1 + \alpha_{11}u)u] &= [\Delta(d_1 + \alpha_{11}u)]u + 2\nabla(d_1 + \alpha_{11}u) \cdot \nabla u + (d_1 + \alpha_{11}u)\Delta u \\ &= [\alpha_{11}\Delta u]u + 2\alpha_{11}\nabla u \cdot \nabla u + (d_1 + \alpha_{11}u)\Delta u \\ &= d_1\Delta u + 2\alpha_{11}u\Delta u + 2\alpha_{11}\nabla u \cdot \nabla u \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

luego obtenemos

$$u_t = (d_1 + 2\alpha_{11}u)\Delta u + 2\alpha_{11}\nabla u \cdot \nabla u + u(a_1 - b_1u - c_1v), \quad (1.1.5)$$

luego en la segunda ecuación de (1.0.2) tenemos que

$$\begin{aligned} \Delta[(d_2 + \alpha_{21}u + \alpha_{22}v)v] &= [\Delta(d_2 + \alpha_{21}u + \alpha_{22}v)]v + 2\nabla(d_2 + \alpha_{21}u + \alpha_{22}v) \cdot \nabla v + \\ &\quad (d_2 + \alpha_{21}u + \alpha_{22}v)\Delta v \\ &= \alpha_{21}[\Delta u]v + \alpha_{22}[\Delta v]v + 2\alpha_{21}\nabla u \cdot \nabla v + 2\alpha_{22}\nabla v \cdot \nabla v \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

luego obtenemos

$$v_t = (d_2 + \alpha_{21}u + 2\alpha_{22}v)\Delta v + 2(\alpha_{21}\nabla u + \alpha_{22}\nabla v) \cdot \nabla v + v(\alpha_{21}\Delta u + a_2 + b_2u - c_2v). \quad (1.1.7)$$

Entonces usando el principio del máximo de Hopf para (1.1.5) y (1.1.7) obtenemos el nonegativo de u y v . Nuevamente, aplicando el principio del máximo Hopf para (1.1.5) se puede también mostrar la acotación de u . \square

Lema 1.1.2. *Con las mismas hipótesis del Lema 1.1.1 existe una constante positiva $C_1(T)$ tal que*

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u(\cdot, t)\|_{L^1(\Omega)} < C_1(T), \quad \sup_{0 \leq t \leq T} \|v(\cdot, t)\|_{L^1(\Omega)} < C_1(T),$$

$$\|u\|_{L^2(Q_T)} < C_1(T), \quad \|v\|_{L^2(Q_T)} < C_1(T).$$

Demostración. Tenemos la primera ecuación de (1.0.2)

$$u_t = \Delta[(d_1 + \alpha_{11}u)u] + u(a_1 - b_1u - c_1v)$$

Luego integrando

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u \, dx = \int_{\Omega} \Delta[(d_1 + \alpha_{11}u)u] \, dx + \int_{\Omega} u(a_1 - b_1u - c_1v) \, dx \quad (1.1.8)$$

En la ecuación (1.1.12) tenemos

$$\int_{\Omega} \Delta[(d_1 + \alpha_{11}u)u] \, dx = 0, \quad (1.1.9)$$

esto desde que usamos una de las fórmulas de Green (**Ver Apéndice**)

$$\int_{\Omega} \Delta[(d_1 + \alpha_{11}u)u] \, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial\eta}(d_1 + \alpha_{11}u)u \, dS \quad (1.1.10)$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta[(d_1 + \alpha_{11}u)u] \, dx &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial\eta}(d_1 + \alpha_{11}u)u \, dS \\ &= \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial\eta}(d_1 + \alpha_{11}u)\right) \cdot u \, dS + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial\eta}(d_1 + \alpha_{11}u) \, dS \\ &= \alpha_{11} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial\eta} u \, dS + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial\eta}(d_1 + \alpha_{11}u) \, dS = 0 \end{aligned} \quad (1.1.11)$$

Hemos utilizado las condiciones de frontera de Neumann y la derivada del producto.

Luego tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u \, dx &= \int_{\Omega} u(a_1 - b_1u - c_1v) \, dx \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u \, dx &= a_1 \int_{\Omega} u \, dx - b_1 \int_{\Omega} u^2 \, dx - c_1 \int_{\Omega} uv \, dx \\ &\leq a_1 \int_{\Omega} u \, dx - b_1 \int_{\Omega} u^2 \, dx \\ &\leq a_1 \int_{\Omega} u \, dx - \frac{b_1}{|\Omega|} \left(\int_{\Omega} u \, dx \right)^2 \end{aligned} \quad (1.1.12)$$

donde hemos utilizado la desigualdad de Hölder. Entonces usando el lema de compa-

ración (**Ver Apéndice**) tenemos $\|u(\cdot, t)\|_{L^1(\Omega)} \leq M'_1$, donde $M'_1 = \max\{\|u_0\|_{L^1(\Omega)}, \frac{a_1}{b_1}|\Omega|\}$.

Además,

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u(\cdot, t)\|_{L^1(\Omega)} < C_1(T). \quad (1.1.13)$$

Desde que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u \, dx \leq a_1 \int_{\Omega} u \, dx - b_1 \int_{\Omega} u^2 \, dx. \quad (1.1.14)$$

Integrando (1.1.14) de 0 a T , tenemos

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(Q_T)}^2 &\leq \frac{a_1}{b_1} M'_1 T + \frac{1}{b_1} \|u_0\|_{L^1(\Omega)}. \\ \|u\|_{L^2(Q_T)} &\leq \sqrt[2]{\frac{a_1}{b_1} M'_1 T + \frac{1}{b_1} \|u_0\|_{L^1(\Omega)}} \end{aligned}$$

Entonces,

$$\|u\|_{L^2(Q_T)} \leq C_1(T). \quad (1.1.15)$$

Ahora, integrando la segunda ecuación en el sistema (1.0.2) sobre el dominio Ω

tenemos

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} v \, dx = a_2 \int_{\Omega} v \, dx + b_2 \int_{\Omega} u v \, dx - c_2 \int_{\Omega} v^2 \, dx. \quad (1.1.16)$$

Multiplicando (1.1.12) por $\frac{b_2}{c_1}$ y con (1.1.16), tenemos

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left(\frac{b_2}{c_1} u + v \right) dx \leq \frac{a_1 b_2}{c_1} \int_{\Omega} u \, dx + |a_2| \int_{\Omega} v \, dx - \frac{b_1 b_2}{c_1} \int_{\Omega} u^2 \, dx - c_2 \int_{\Omega} v^2 \, dx. \quad (1.1.17)$$

Entonces

$$\begin{aligned} &\min\left\{1, \frac{b_2}{c_1}\right\} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (u + v) \, dx \\ &\leq \max\left\{\frac{a_1 b_2}{c_1}, |a_2|\right\} \int_{\Omega} (u + v) \, dx - \min\left\{\frac{b_1 b_2}{c_1}, c_2\right\} \int_{\Omega} (u^2 + v^2) \, dx \end{aligned}$$

$$\leq \max\left\{\frac{a_1 b_2}{c_1}, |a_2|\right\} \int_{\Omega} (u + v) dx - \frac{1}{2} \min\left\{\frac{b_1 b_2}{c_1}, c_2\right\} \left[\int_{\Omega} (u + v) dx \right]^2.$$

Por lo tanto, $\|v(\cdot, t)\|_{L^1(\Omega)} \leq M'_2$, donde $M'_2 = \max\left\{\frac{A_1}{A_2}, \|u_0 + v_0\|_{L^1(\Omega)}\right\}$,

$$A_1 = \frac{\max\left\{\frac{a_1 b_2}{c_1}, |a_2|\right\}}{\min\left\{1, \frac{b_2}{c_1}\right\}}, \quad A_2 = \frac{\min\left\{\frac{b_1 b_2}{c_1}, c_2\right\}}{2 \min\left\{1, \frac{b_2}{c_1}\right\}}.$$

Entonces

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|v(\cdot, t)\|_{L^1(\Omega)} < C_1(T). \quad (1.1.18)$$

Integrando (1.1.17) de 0 a T , tenemos

$$c_2 \int_{Q_T} v^2 dx dt \leq \frac{a_1 b_2}{c_1} \int_0^T M'_1 dt + |a_2| \int_0^T M'_2 dt + \frac{b_2}{c_1} \|u_0\|_{L^1(\Omega)} + \|v_0\|_{L^1(\Omega)},$$

lo cual implica $\|v\|_{L^2(Q_T)} \leq C_1(T)$. □

Lema 1.1.3. *Con las mismas hipótesis del Lema 1.1.2. Sea $w_1 = (d_1 + \alpha_{11}u)u$.*

Entonces existe una constante $C_2(T)$, dependiendo en $\|u_0\|_{W_2^1(\Omega)}$ y $\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}$ tal que

$$\|w_1\|_{W_2^{2,1}(Q_T)} \leq C_2(T). \quad (1.1.19)$$

Además, $\nabla w_1 \in V_2(Q_T)$.

Demostración. Notar que w_1 satisface la ecuación

$$w_{1t} = (d_1 + 2\alpha_{11}u)\Delta w_1 + n_1 + n_2 v, \quad (1.1.20)$$

donde $n_1 = u(d_1 + 2\alpha_{11}u)(a_1 - b_1 u)$, $n_2 = -c_1(d_1 + 2\alpha_{11}u)u$ depende en u y son funciones acotadas debido al Lema 1.1.1. Multiplicando la ecuación anterior por

$-\Delta w_1$ y usando integración por partes sobre Ω , tenemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla w_1|^2 dx = - \int_{\Omega} (d_1 + 2\alpha_{11}u)(\Delta w_1)^2 dx - \int_{\Omega} (n_1 + n_2v)\Delta w_1 dx. \quad (1.1.21)$$

Integrando (1.1.21) de 0 a t , obtenemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla w_1(x, t)|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla w_1(x, 0)|^2 dx \\ &= - \int_{Q_t} (d_1 + 2\alpha_{11}u)(\Delta w_1)^2 dx dt - \int_{Q_t} (n_1 + n_2v)\Delta w_1 dx dt \\ &\leq -d_1 \int_{Q_t} |\Delta w_1|^2 dx dt + \int_{Q_t} (n_1 + n_2v) \cdot |\Delta w_1| dx dt. \end{aligned}$$

Por la desigualdad de Young y la desigualdad de Hölder, tenemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla w_1(x, t)|^2 dx + d_1 \int_{Q_T} |\Delta w_1|^2 dx dt \\ &\leq (\|n_1\|_{L^2(Q_T)} + \|n_2v\|_{L^2(Q_T)}) \cdot \|\Delta w_1\|_{L^2(Q_T)} + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla w_1(x, 0)|^2 dx \\ &\leq m_1(1 + \|v\|_{L^2(Q_T)}) \cdot \|\Delta w_1\|_{L^2(Q_T)} + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla w_1(x, 0)|^2 dx \\ &\leq m_1(1 + C_1(T)) \cdot \|\Delta w_1\|_{L^2(Q_T)} + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla w_1(x, 0)|^2 dx \\ &\leq \frac{d_1}{2} \|\Delta w_1\|_{L^2(Q_T)}^2 + \frac{m_1^2(1 + C_1(T))^2}{2d_1} + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla w_1(x, 0)|^2 dx. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\Omega} |\nabla w_1|^2(x, t) dx + d_1 \int_{Q_T} |\Delta w_1|^2 dx dt \leq m_2,$$

donde m_2 depende en $\|u_0\|_{W_2^1(\Omega)}$ y $\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}$. Esto implica $\nabla w_1 \in V_2(Q_T)$. Desde que $w_1 \in L^2(Q_T)$ obtenemos la estimativa de regularidad elíptica del siguiente resultado

Lema 2.3 Suponga que $u \in C^2(\overline{\Omega})$ y $\frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial \Omega} = 0$, entonces

$$\|u\|_{W_p^2(\Omega)} \leq C(\Omega)(\|\Delta u\|_{L^p(\Omega)} + \|u\|_{L^p(\Omega)}), \forall p > 1$$

Demostración : Ver [2, Lema 2.3]

$$\int_{Q_T} \|(w_1)_{x_i x_j}\|^2 dx dt \leq m_3 \quad \text{para } i, j = 1, \dots, n.$$

De (1.1.20), desde que n_1, n_2 y u son acotadas y $v \in L^2(Q_T)$, tenemos $w_{1t} \in L^2(Q_T)$.

Luego, $w_1 \in W_2^{2,1}(Q_T)$. □

Sea $a(x, t, \xi)$ continua y (x, ξ) -diferenciable para $(x, t, \xi) \in Q_T \times \mathbb{R}$. Suponga también que $a(x, t, \xi)$ satisface las siguientes condiciones

- (i) Existe $d > 0$ tal que $a(x, t, \xi) \geq d$ y $a_\xi(x, t, \xi) \geq 0$ para todo $(x, t) \in Q_T$ y ξ en \mathbb{R} .
- (ii) Existe una función continua M en \mathbb{R} tal que $a(x, t, \xi) \leq M(\xi)$ para todo $(x, t) \in Q_T$.
- (iii) Para cualquier función medible acotada g en Q_T , $|\nabla_x a(., ., g(.,.))|$ está en el espacio $L^{2p}(Q_T)$.

Lema 1.1.4. Suponga que $w \in W_p^{2,1}(Q_T) \cap C^{2,1}(\overline{\Omega} \times [0, T])$ es una función acotada satisfaciendo

$$w_t \leq a(x, t, w)\Delta w + f(x, t) \quad \text{en } Q_T \quad (1.1.22)$$

con condición de frontera $\frac{\partial w}{\partial \nu} \leq 0$ en ∂Q_T , donde $f \in L^p(Q_T)$. Entonces, ∇w esta en $L^{2p}(Q_T)$.

Demostración. Supongamos que $w \geq 0$. Reemplazamos $a(x, t, \inf_{Q_T} w + \xi)$ por $a(x, t, \xi)$, y $w - \inf_{Q_T} w$ por w . Para cualquier $0 < t < T$ fijo, multiplicamos (1.1.22) por $w|\nabla w|^{2(p-1)}$ e integrando el resultado sobre Ω , tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} w_t w |\nabla w|^{2(p-1)} dx &\leq \int_{\Omega} \Delta w (aw |\nabla w|^{2(p-1)}) dx + \int_{\Omega} f w |\nabla w|^{2(p-1)} dx \\ &\leq \int_{\partial \Omega} aw |\nabla w|^{2(p-1)} \frac{\partial w}{\partial \nu} dx - \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla (aw |\nabla w|^{2(p-1)}) dx + \int_{\Omega} f w |\nabla w|^{2(p-1)} dx \\ &\leq - \int_{\Omega} aw |\nabla w|^{2p} dx - \int_{\Omega} w \nabla w \cdot \nabla (a |\nabla w|^{2(p-1)}) dx + \int_{\Omega} f w |\nabla w|^{2(p-1)} dx \\ &\leq -d \int_{\Omega} w |\nabla w|^{2p} dx - \int_{\Omega} w a_{\xi} |\nabla w|^{2p} dx - \int_{\Omega} w |\nabla w|^{2(p-1)} \nabla w \cdot a_x dx \\ &\quad - \int_{\Omega} w a \nabla w \cdot \nabla (|\nabla w|^{2(p-1)}) dx + \int_{\Omega} f w |\nabla w|^{2(p-1)} dx \\ &\leq -d \int_{\Omega} w |\nabla w|^{2p} dx + \int_{\Omega} w |\nabla w|^{2(p-1)} |a_x| dx \\ &\quad + 2(p-1) \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} w a |\nabla w|^{2(p-1)} |w_{x_i x_j}| dx + \int_{\Omega} w |f| |\nabla w|^{2(p-1)} dx \end{aligned} \quad (1.1.23)$$

Desde que w es acotado, podemos encontrar una constante $C_1 > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
d \int_{\Omega} w |\nabla w|^{2p} dx &\leq C_1 \left\{ \int_{\Omega} |w_t| |\nabla w|^{2(p-1)} dx + \int_{\Omega} |\nabla w|^{2(p-1)} |a_x| dx \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} |\nabla w|^{2(p-1)} |w_{x_i x_j}| dx + \int_{\Omega} |f| |\nabla w|^{2(p-1)} dx \right\}.
\end{aligned} \tag{1.1.24}$$

Usando la desigualdad de Young, podemos encontrar una constante $C_2 > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
|w_t| |\nabla w|^{2(p-1)} &\leq \frac{d}{8C_1} |\nabla w|^{2p} + C_2 |w_t|^p, \\
|\nabla w|^{2(p-1)} |a_x| &\leq \frac{d}{8C_1} |\nabla w|^{2p} + C_2 |a_x|^{2p}, \\
\sum_{i,j=1}^n |\nabla w|^{2(p-1)} |w_{x_i x_j}| &\leq \frac{d}{8C_1} |\nabla w|^{2p} + C_2 \sum_{i,j=1}^n |w_{x_i x_j}|^p, \\
|f| |\nabla w|^{2(p-1)} &\leq \frac{d}{8C_1} |\nabla w|^{2p} + C_2 |f|^p
\end{aligned} \tag{1.1.25}$$

Por lo tanto (1.1.24) llega a ser

$$\begin{aligned}
\frac{d}{2} \int_{\Omega} |\nabla w|^{2p} dx &\leq C_1 C_2 \left\{ \|w_t(\cdot, t)\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{i,j=1}^n \|w_{x_i x_j}(\cdot, t)\|_{L^p(\Omega)}^p \right. \\
&\quad \left. + \|f(\cdot, t)\|_{L^p(\Omega)}^p + \|a_x(\cdot, t, w(\cdot, t))\|_{L^{2p}(\Omega)}^{2p} \right\}
\end{aligned} \tag{1.1.26}$$

Integrando la desigualdad (1.1.26) con respecto a t de 0 a T obtenemos

$$\int_{Q_T} |\nabla w|^{2p} dx dt \leq C [\|w\|_{W_p^{2,1}(Q_T)}^p + \|f\|_{L^p(Q_T)}^p + \|a_x(\cdot, \cdot, w)\|_{L^{2p}(Q_T)}^{2p}] \tag{1.1.27}$$

donde $C > 0$ es una constante dependiendo en $\sup_{Q_T} w$ y a . De la hipótesis del lema, obtenemos que ∇w está en $L^{2p}(Q_T)$

□

Lema 1.1.5. *Sea $q > 1$, $\tilde{q} = 2 + \frac{4q}{n(q+1)}$, $\tilde{\beta}$ en $(0, 1)$ y sea $C_T > 0$ cualquier número el cual pueda depender de T . Entonces existe una constante M_1 dependiendo en $q, n, \Omega, \tilde{\beta}$ y C_T tal que para cualquier g en $C([0, T], W_2^1(\Omega))$ con $(\int_{\Omega} |g(\cdot, t)|^{\tilde{\beta}} dx)^{1/\tilde{\beta}} \leq C_T$ para todo $t \in [0, T]$, tenemos la desigualdad*

$$\|g\|_{L^{\tilde{q}}(Q_T)} \leq M_1 \left\{ 1 + \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \|g(\cdot, t)\|_{L^{2q/q+1}(\Omega)} \right)^{4q/n(q+1)\tilde{q}} \|\nabla g\|_{L^2(Q_T)}^{2/\tilde{q}} \right\}.$$

Demostración Ver [6]

Capítulo 2

Estimativas

2.1. L^r - Estimativas para v

Lema 2.1.1. *Existe una constante $C_3(T)$ tal que $\|\nabla u\|_{L^4(Q_T)} \leq C_3(T)$.*

Demostración. Sea $\delta = \alpha_{11}/d_1$, $w_1 = (1 + \delta u)u$. Por el Lema 1.1.1, u es acotada.

Por lo tanto, w_1 es también acotado. Por el Lema 1.1.3, tenemos $w_1 \in W_2^{2,1}(Q_T)$.

Además, w_1 satisface

$$\begin{aligned} w_{1t} &\leq d_1(1 + 2\delta u)\Delta w_1 + a_1 u(1 + 2\delta u) \\ &= \sqrt{d_1^2 + 4\delta d_1 w_1} \Delta w_1 + a_1 u(1 + 2\delta u). \end{aligned}$$

Por el Lema 1.1.4 con $p = 2$, $a(x, t, \xi) = \sqrt{d_1^2 + 4\delta d_1 \xi}$, $f(x, t) = a_1 u(x, t)(1 + 2\delta u(x, t))$, obtenemos el resultado deseado. \square

Lema 2.1.2. *Sea $r > 2$ y $p_r = \frac{2r}{r-2}$ dos números positivos. Suponga que $\alpha_{22} > 0$ y suponga también que existe una constante $M_{r,T} > 0$ dependiendo solamente de r, T, Ω y los coeficientes de (1.0.2) tal que*

$$\|\nabla u\|_{L^r(Q_T)} \leq M_{r,T}.$$

Entonces para cualquier $q > 1$, existe una constante $C(r, q, T) > 0$ tal que

$$\begin{aligned} & \|v(\cdot, t)\|_{L^q(\Omega)}^q + \|\nabla(v^{q/2})\|_{L^2(Q_t)}^2 + \|\nabla(v^{(q+1)/2})\|_{L^2(Q_t)}^2 \\ & \leq C(r, q, T) \left(1 + \|v\|_{L^{\frac{pr(q-1)}{2}}(Q_t)}^{q-1}\right). \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

Demostración. Para cualquier constante $q > 1$, multiplicando la segunda ecuación de (1.0.2) por qv^{q-1} y usando la integración por partes, obtenemos

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} v^q dx \\ & = q \int_{\Omega} v^{q-1} \nabla \cdot [(d_2 + \alpha_{21}u + 2\alpha_{22}v) \nabla v + \alpha_{21}v \nabla u] dx + q \int_{\Omega} v^q (a_2 + b_2u - c_2v) dx \\ & = -q(q-1) \int_{\Omega} v^{q-2} (d_2 + \alpha_{21}u + 2\alpha_{22}v) |\nabla v|^2 dx - \alpha_{21}(q-1) \int_{\Omega} \nabla(v^q) \cdot \nabla u dx \\ & \quad + q \int_{\Omega} v^q (a_2 + b_2u - c_2v) dx \\ & \leq -q(q-1)d_2 \int_{\Omega} v^{q-2} |\nabla v|^2 dx - 2\alpha_{22}q(q-1) \int_{\Omega} v^{q-1} |\nabla v|^2 dx \\ & \quad - \alpha_{21}(q-1) \int_{\Omega} \nabla(v^q) \cdot \nabla u dx + q \int_{\Omega} v^q (a_2 + b_2u - c_2v) dx \\ & = -\frac{4(q-1)d_2}{q} \int_{\Omega} |\nabla(v^{\frac{q}{2}})|^2 dx - \frac{8\alpha_{22}q(q-1)}{(q+1)^2} \int_{\Omega} |\nabla(v^{\frac{q+1}{2}})|^2 dx \\ & \quad - \alpha_{21}(q-1) \int_{\Omega} \nabla(v^q) \cdot \nabla u dx + q \int_{\Omega} v^q (a_2 + b_2u - c_2v) dx. \end{aligned}$$

Integrando la desigualdad anterior de 0 a t , tenemos

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} v^q(x, t) dx + \frac{4(q-1)d_2}{q} \int_{Q_t} |\nabla(v^{\frac{q}{2}})|^2 dx dt + \frac{8\alpha_{22}q(q-1)}{(q+1)^2} \int_{Q_t} |\nabla(v^{\frac{q+1}{2}})|^2 dx dt \\ & \leq \int_{\Omega} v^q(x, 0) dx - \alpha_{21}(q-1) \int_{Q_t} \nabla(v^q) \cdot \nabla u dx dt + q \int_{Q_t} v^q (a_2 + b_2u - c_2v) dx dt. \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

Por la desigualdad de Hölder, tenemos

$$\begin{aligned}
& q \int_{Q_t} v^q (a_2 + b_2 u - c_2 v) dx dt \\
&= a_2 q \int_{Q_t} v^q dx dt - c_2 q \int_{Q_t} v^{q+1} dx dt + b_2 q \int_{Q_t} uv^q dx dt \\
&\leq -c_2 q \|v\|_{L^{q+1}(Q_t)}^{q+1} + |a_2| q |Q_T|^{\frac{1}{q+1}} \|v\|_{L^{q+1}(Q_t)}^q + b_2 q \int_{Q_t} uv^q dx dt \quad (2.1.3) \\
&\leq -c_2 q \|v\|_{L^{q+1}(Q_t)}^{q+1} + |a_2| q [\varepsilon \|v\|_{L^{q+1}(Q_t)}^{q+1} + \varepsilon^{-q} |Q_T|^{\frac{q}{q+1}}] + b_2 q \int_{Q_t} uv^q dx dt \\
&\leq B_1 + b_2 q \int_{Q_t} uv^q dx dt,
\end{aligned}$$

donde $\varepsilon = \frac{c_2}{|a_2|}$, B_1 depende en $T, q, |\Omega|$ y los coeficientes de (1.0.2).

Por otro lado, desde que $\frac{1}{r} + \frac{1}{2} + \frac{1}{p_r} = 1$, usando la desigualdad de Hölder y la desigualdad de Poincaré, tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{Q_t} uv^q dx dt &= \int_{Q_t} u \cdot v^{\frac{q-1}{2}} \cdot v^{\frac{q+1}{2}} dx dt \\
&\leq \|v^{\frac{q-1}{2}}\|_{L^{p_r}(Q_t)} \cdot \|v^{\frac{q+1}{2}}\|_{L^2(Q_t)} \cdot \|u\|_{L^r(Q_t)} \quad (2.1.4) \\
&\leq C_4 m \|v\|_{L^{\frac{p_r(q-1)}{2}}(Q_t)}^{(q-1)/2} \cdot \|\nabla(v^{\frac{q+1}{2}})\|_{L^2(Q_t)}.
\end{aligned}$$

La substitución de (2.1.4) en (2.1.3) conduce a

$$q \int_{Q_t} v^q (a_2 + b_2 u - c_2 v) dx dt \leq B_1 + C_5 \|v\|_{L^{\frac{p_r(q-1)}{2}}(Q_t)}^{(q-1)/2} \cdot \|\nabla(v^{\frac{q+1}{2}})\|_{L^2(Q_t)}. \quad (2.1.5)$$

Desde que $\frac{1}{r} + \frac{1}{2} + \frac{1}{p_r} = 1$ y ∇u esta en $L^r(Q_T)$, usando la desigualdad de Hölder, tenemos

$$\left| - \int_{Q_t} \nabla(v^q) \cdot \nabla u dx dt \right| = \frac{2q}{q+1} \left| \int_{Q_t} v^{\frac{q-1}{2}} \cdot \nabla(v^{\frac{q+1}{2}}) \cdot \nabla u dx dt \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{2q}{q+1} \|v^{\frac{q-1}{2}}\|_{L^{pr}(Q_t)} \cdot \|\nabla(v^{\frac{q+1}{2}})\|_{L^2(Q_t)} \cdot \|\nabla u\|_{L^r(Q_t)} \\
&\leq \frac{2q}{q+1} \|v\|_{L^{\frac{pr(q-1)}{2}}(Q_t)}^{\frac{q-1}{2}} \cdot \|\nabla(v^{\frac{q+1}{2}})\|_{L^2(Q_t)} \cdot \|\nabla u\|_{L^r(Q_t)} \\
&\leq \frac{2q}{q+1} M_{r,T} \|v\|_{L^{\frac{pr(q-1)}{2}}(Q_t)}^{\frac{q-1}{2}} \cdot \|\nabla(v^{\frac{q+1}{2}})\|_{L^2(Q_t)}.
\end{aligned}$$

La substitución (2.1.5) y la desigualdad anterior en (2.1.2) conduce a

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} v^q(x, t) dx + \frac{4(q-1)d_2}{q} \int_{Q_t} |\nabla(v^{\frac{q}{2}})|^2 dx dt + \frac{8\alpha_{22}q(q-1)}{(q+1)^2} \int_{Q_t} |\nabla(v^{\frac{q+1}{2}})|^2 dx dt \\
&\leq B_2 + C_6 \|v\|_{L^{\frac{pr(q-1)}{2}}(Q_t)}^{\frac{q-1}{2}} \cdot \|\nabla(v^{\frac{q+1}{2}})\|_{L^2(Q_t)} \\
&\leq B_2 + \frac{C_6}{4\varepsilon} \|v\|_{L^{\frac{pr(q-1)}{2}}(Q_t)}^{q-1} + C_6 \varepsilon \|\nabla(v^{\frac{q+1}{2}})\|_{L^2(Q_t)}^2,
\end{aligned} \tag{2.1.6}$$

donde $B_2 > 0$ depende en q, T, Ω coeficientes de (1.0.2) y datos iniciales v_0 . Para cualquier $\varepsilon > 0$, de (2.1.6) y mediante la elección de ε suficientemente pequeño, tal que $C_6 \varepsilon < \frac{8\alpha_{22}q(q-1)}{(q+1)^2}$, obtenemos (2.1.1). Esto completa la demostración del lema. \square

Para cualquier número a , denotamos $a_+ = \max\{a, 0\}$.

Proposición 2.1.1. *Sea $\alpha_{22} > 0$.*

(i) *Si $\alpha_{11} > 0$, entonces existe una constante $C_7(T) > 0$ tal que*

$$\|v\|_{V_2(Q_T)} \leq C_7(T).$$

Además, para cualquier constante $r < \frac{4(n+1)}{(n-2)_+}$, existe una constante positiva C_T

tal que

$$\|v\|_{L^r(Q_T)} \leq C_T.$$

(ii) If $\alpha_{11} = 0$, entonces

$$\|v\|_{L^r(Q_T)} \leq C_T \quad \text{para cualquier } r > 1.$$

Demostración. (i) Fijemos $w = v^{(q+1)/2}$ así es que $v^q = w^{2q/(q+1)}$ y $v^{q+1} = w^2$.

Entonces

$$\begin{aligned} E &\equiv \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\Omega} v^q(x, t) dx + \int_{Q_T} |\nabla(v^{(q+1)/2})|^2 dx dt \\ &= \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\Omega} w^{2q/q+1} dx + \int_{Q_T} |\nabla w|^2 dx dt. \end{aligned}$$

Sea $r_0 = 4$, $p_0 = \frac{2r_0}{r_0-2}$. Por Lema 2.1.1, vemos que ∇u está en $L^{r_0}(Q_T)$. Así es que,

del Lema 2.1.2, tenemos

$$E + \|\nabla(v^{\frac{q}{2}})\|_{L^2(Q_T)}^2 \leq C(r_0, q, T) \left(1 + \|w\|_{L^{\frac{p_0(q-1)}{q+1}}(Q_T)}^{\frac{2(q-1)}{q+1}}\right), \quad (2.1.7)$$

donde $C(r_0, q, T) > 0$ dependiendo solamente de T, Ω , condiciones iniciales u_0, v_0 y

los coeficientes de (1.0.2). Desde que $q > 1$, restringimos nuestro q

$$(np_0 - 2n - 4)q \leq 2n + np_0. \quad (2.1.8)$$

Entonces, $\frac{p_0(q-1)}{q+1} \leq \tilde{q}$, donde $\tilde{q} = 2 + \frac{4q}{n(q+1)}$. Por lo tanto, por la desigualdad de

Hölder

$$\|w\|_{L^{\frac{p_0(q-1)}{q+1}}(Q_T)} \leq C_8(q, T) \|w\|_{L^{\tilde{q}}(Q_T)}, \quad (2.1.9)$$

donde $C_8(q, T) = |Q_T|^{\frac{q+1}{p_0(q-1)} - \frac{1}{q}}$. Fijando $\tilde{\beta} = 2/(q+1) \in (0, 1)$, por Lema 1.1.2 tenemos

$$\|w(., t)\|_{L^{\tilde{\beta}}(\Omega)} = \|v(., t)\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{1}{\tilde{\beta}}} \leq (C_1(T))^{\frac{1}{\tilde{\beta}}}, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.1.10)$$

Luego, por Lema 1.1.5 y la definición de E , (2.1.10) conduce a

$$\|w\|_{L^{p_0(q-1)/q+1}(Q_T)} \leq C_8(q, T) \|w\|_{L^{\tilde{q}}(Q_T)} \leq C_8(q, T) M_1 \{1 + E^{2/n\tilde{q}} E^{\frac{1}{\tilde{q}}}\}. \quad (2.1.11)$$

Entonces (2.1.7) junto con la anterior desigualdad, podemos encontrar una constante $C_9(q, T) > 0$ tal que

$$E \leq C_9(q, T)(1 + E^\mu E^\nu) \quad (2.1.12)$$

donde

$$\mu = \frac{4(q-1)}{n\tilde{q}(q+1)}, \quad \nu = \frac{2(q-1)}{\tilde{q}(q+1)}.$$

Desde que

$$\mu + \nu = \frac{2(q-1)}{\tilde{q}(q+1)} \left[\frac{2}{n} + 1 \right] < \frac{1}{\tilde{q}} \left[\frac{4q}{n(q+2)} + 2 \right] = 1,$$

Es simple ver que E es acotada en (2.1.12). Luego de (2.1.11) y (2.1.12) obtenemos $w \in L^{\tilde{q}}(Q_T)$ que a su vez implica que $v \in L^r(Q_T)$ con $r = \frac{\tilde{q}(q+1)}{2}$ para cualquier q que satisface (2.1.8). Ahora, de (2.1.8), para $n \leq 2$, tenemos

$$np_0 - 2n - 4 = 2(n-2) \leq 0, \quad (2.1.13)$$

entonces (2.1.8) es válido para todo q . Así que para $n \leq 2$, $v \in L^r(Q_T)$ para todo

$r > 1$. Ahora, suponga que $n > 2$, vemos que (2.1.8) es equivalente a

$$1 < q < q_0 := \frac{2n + np_0}{(np_0 - 2n - 4)} = \frac{3n}{n - 2}.$$

Entonces, tenemos

$$\frac{\tilde{q}(q+1)}{2} = q + 1 + \frac{2q}{n} \leq \bar{r}_1 := q_0 + 1 + \frac{2q_0}{n} = \frac{4(n+1)}{n-2}.$$

Asi, vemos que v está en $L^r(Q_T)$ para toda $1 < r \leq \bar{r}_1$. Desde que (2.1.8) es verdad para $q = 2$. Asi cuando $q = 2$, tenemos que E es finito. Por lo tanto, de (2.1.7) y (2.1.11), vemos que $\|v\|_{V_2(Q_T)}$ es acotada para cualquier n , esto completa la demostración de la proposición 2.1.1 cuando $\alpha_{11} > 0$ y $r < \frac{4(n+2)}{(n-2)_+}$.

A seguir, consideremos el caso $\alpha_{11} = 0$. Por la desigualdad de Hölder, tenemos

$$\begin{aligned} & q \int_{Q_t} v^q (a_2 + b_2 u - c_2 v) dx dt \\ &= a_2 q \int_{Q_t} v^q dx dt - c_2 q \int_{Q_t} v^{q+1} dx dt + b_2 q \int_{Q_t} u v^q dx dt \\ &\leq -c_2 q \|v\|_{L^{q+1}(Q_t)}^{q+1} + |a_2| q |Q_T|^{\frac{1}{q+1}} \|v\|_{L^{q+1}(Q_t)}^q \\ &\quad + b_2 q \|v\|_{L^{q+1}(Q_t)}^q \cdot \|u\|_{L^{q+1}(Q_t)} \\ &\leq -c_2 q \|v\|_{L^{q+1}(Q_t)}^{q+1} + |a_2| q |Q_T|^{\frac{1}{q+1}} \|v\|_{L^{q+1}(Q_t)}^q + b_2 q m \|v\|_{L^{q+1}(Q_t)}^q \\ &\leq -c_2 q \|v\|_{L^{q+1}(Q_t)}^{q+1} + q\varepsilon \|v\|_{L^{q+1}(Q_t)}^{q+1} + B_3 \\ &\leq B_3, \end{aligned} \tag{2.1.14}$$

donde $\varepsilon = c_2$ y $B_3 > 0$ el cual depende solamente de $T, q, |\Omega|$, $\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}$ y los coeficientes de (1.0.2).

Integramos por partes una vez para obtener del Lema 1.1.1 y del [20, Teorema 9.1, p. 341-342] usando las condiciones de frontera de Neumann en [20, p.351] (**Ver Apéndice**) tenemos

$$\begin{aligned}
& \left| - \int_{Q_t} \nabla(v^q) \cdot \nabla u \, dx \, dt \right| \\
&= \left| - \int_{Q_t} v^q \Delta u \, dx \, dt \right| \\
&\leq \|v\|_{L^{q+1}(Q_T)}^q \cdot \|\Delta u\|_{L^{q+1}(Q_T)} \\
&\leq C_{10} \|v\|_{L^{q+1}(Q_T)}^q \left(\|u(a_1 - b_1 u - c_1 v)\|_{L^{q+1}(Q_T)} + \|u_0\|_{W_{q+1}^{2-\frac{2}{q+1}}(\Omega)} \right) \\
&\leq C_{11} \left(1 + \|v\|_{L^{q+1}(Q_T)}^{q+1} \right).
\end{aligned} \tag{2.1.15}$$

La substitución de (2.1.14) y (2.1.15) en (2.1.2) conduce a

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|v^q(t)\|_{L^q(\Omega)}^q + \|\nabla(v^{(q+1)/2})\|_{L^2(Q_T)}^2 \leq C_{12} (1 + \|v\|_{L^{q+1}(Q_T)}^{q+1}). \tag{2.1.16}$$

Introducimos $w = v^{\frac{q+1}{2}}$, entonces de (2.1.16) obtenemos

$$E \equiv \sup_{0 \leq t \leq T} \|w(t)\|_{L^{\frac{2q}{q+1}}(\Omega)}^{\frac{2q}{q+1}} + \|\nabla w\|_{L^2(Q_T)}^2 \leq C_{12} (1 + \|w\|_{L^2(Q_T)}^2). \tag{2.1.17}$$

Del Lema 1.1.2 tenemos que $v \in L^2(Q_T)$, así $\|w\|_{L^{\frac{4}{q+1}}(Q_T)} \leq C_{13}$. Desde que $\frac{4}{q+1} < 2 \leq \tilde{q}$. Luego de la desigualdad de Hölder

$$\|w\|_{L^2(Q_T)}^2 \leq \|w\|_{L^{\tilde{q}}(Q_T)}^{2(1-\lambda)} \|w\|_{L^{\frac{4}{q+1}}(Q_T)}^{2\lambda} \leq C_{13}^{2\lambda} \|w\|_{L^{\tilde{q}}(Q_T)}^{2(1-\lambda)}, \tag{2.1.18}$$

donde $\lambda = (\frac{1}{2} - \frac{1}{\tilde{q}}) / (\frac{q+1}{4} - \frac{1}{\tilde{q}})$. Fijando $\tilde{\beta} = 2/(q+1) \in (0, 1)$, tenemos $\|w(\cdot, t)\|_{L^{\tilde{\beta}}(\Omega)} = \|v(\cdot, t)\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{1}{\tilde{\beta}}} \leq C_1(T)^{\frac{1}{\tilde{\beta}}}$ para todo $t \in [0, T]$ por Lema 1.1.2. Entonces de (2.1.17),

(2.1.18) y del Lema 1.1.5 tenemos que

$$E \leq C_{14}(1 + E^\alpha) \quad (2.1.19)$$

donde

$$\alpha = \frac{2(1-\lambda)}{\tilde{q}} \left(\frac{2}{n} + 1 \right) < 1.$$

En consecuencia (2.1.19) implica

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|w(t)\|_{L^{\frac{2q}{q+1}}(\Omega)}^{\frac{2q}{q+1}} \leq E \leq C_{15}$$

para algún $C_{15} > 0$, sea $r = q > 1$, así es que $\sup_{0 \leq t \leq T} \|v(t)\|_{L^r(\Omega)} \leq C_T$ y la demostración concluye. \square

Capítulo 3

Demostración del Teorema Principal

3.1. Demostración del Teorema 1.0.2

El primer paso de la demostración es mostrar que v está en $L^r(Q_T)$ para cualquier $r > 1$.

Lema 3.1.1. *Sea $\alpha_{11} > 0$ y supongamos que existen $r_1 > \max\{\frac{n+2}{2}, 3\}$ y una constante positiva $C_{r_1, T}$ tal que*

$$\|v\|_{L^{r_1}(Q_T)} \leq C_{r_1, T}.$$

Entonces, v está en $L^r(Q_T)$ para cualquier $r > 1$.

Demostración. La demostración es casi idéntica a [9, Lema 4.1], (**Ver Apéndice**) pero para completar repetimos esto aquí. Primero, la ecuación para u puede ser escrita como

$$u_t = \nabla \cdot [(d_1 + 2\alpha_{11}u)\nabla u] + u(a_1 - b_1u - c_1v), \quad (3.1.1)$$

donde $d_1 + 2\alpha_{11}u$ está acotado en \overline{Q}_T por el Lema 1.1.1 y $u(a_1 - b_1u - c_1v)$ está en L^{r_1} con $r_1 > \frac{n+2}{2}$. Aplicando el resultado de continuidad de la desigualdad de Hölder

en [20, Teorema 10.1, p. 204] (**Ver Apéndice**) a (3.1.1) tenemos que

$$u \in C^{\beta, \frac{\beta}{2}}(\overline{Q}_T) \quad \text{para algun } \beta > 0. \quad (3.1.2)$$

Además,

$$w_{1t} = (d_1 + 2\alpha_{11}u)\Delta w_1 + f_1, \quad (3.1.3)$$

donde $w_1 = (d_1 + \alpha_{11}u)u$ está como en la demostración del Lema 1.1.3, $f_1 = (d_1 + 2\alpha_{11}u)u(a_1 - b_1u - c_1v)$. Desde que u es acotado y por la suposición de este Lema, vemos que f_1 está en $L^{r_1}(Q_T)$. De (3.1.2), Lema 1.1.1 y la Proposición 2.1.1, aplicando [20, Teorema 9.1, pp. 341-342] y de [20, P. 351], (**Ver Apéndice**) tenemos

$$w_1 \in W_{r_1}^{2,1}(Q_T). \quad (3.1.4)$$

Esto implica $\nabla u = \frac{1}{d_1 + 2\alpha_{11}u} \nabla w_1$ en $L^{r_1}(Q_T)$. Ahora, siguiendo la demostración de la Proposición 2.1.1 con r_1 en vez de r_0 y $p_1 = \frac{2r_1}{r_1 - 2}$ en vez de p_0 , vemos que v esta en $L^r(Q_T)$ para cualquier $r > 1$ o v está en $L^{r_2}(Q_T)$ donde

$$r_2 := \frac{(n+1)r_1}{n+2-r_1}.$$

El último caso sucede si y solamente si $n+2-r_1 > 0$. Si v está en $L^{r_2}(Q_T)$, vemos que f_1 esta en $L^{r_2}(Q_T)$. Por lo tanto, aplicando [20, Teorema 9.1, p. 341-342] y [20, p. 351] (**Ver Apéndice**), tenemos ∇u en $L^{r_2}(Q_T)$. Luego usando el mismo argumento una y otra vez nos llevará a una suceción de números

$$r_{k+1} := \frac{(n+1)r_k}{n+2-r_k}. \quad (3.1.5)$$

luego obtenemos que v está en $L^r(Q_T)$ para cualquier $r > 1$ cuando

$$n + 2 - r_k \leq 0. \quad (3.1.6)$$

Desde $r_1 > 3$, de (3.1.5) podemos demostrar por inducción que $r_k > 3, k = 1, 2, \dots$

Entonces, tenemos

$$\frac{r_{k+1}}{r_k} = \frac{n+1}{n+2-r_k} \geq \frac{n+1}{n-1} > 1. \quad (3.1.7)$$

Por consiguiente, la sucesión r_k es estrictamente creciente. Por lo tanto, debe existir algún k tal que (3.1.6) se obtiene. Luego concluimos que v está en $L^r(Q_T)$ para cualquier $r > 1$, es decir, existe una constante positiva C_{16} tal que $\|v\|_{L^r(Q_T)} \leq C_{16}$, donde $C_{16} > 0$ depende de q, T, Ω y los coeficientes del sistema (1.0.2) pero no en r . □

Por tanto, de la proposición 2.1.1 y del Lema 3.1.1, tenemos el siguiente lema.

Lema 3.1.2. *Sea $\alpha_{22} > 0$ y supongamos (i) $\alpha_{11} = 0$ o (ii) $\alpha_{11} > 0$ y $n < 10$.*

Entonces existe M_2 tal que

$$\|v\|_{L^r(Q_T)} \leq M_2 \quad \text{para cualquier } r > 1.$$

Además, para cualquier $r > 1$, v está en $V_2(Q_T)$.

Prueba del Teorema 1.0.2. Damos la demostración solamente para el caso $\alpha_{11} > 0$ por que la demostración para $\alpha_{11} = 0$ es esencialmente la misma. Por Lema 3.1.2, v

está acotada en \overline{Q}_T . De (3.1.3), tenemos

$$w_{1t} = (d_1 + 2\alpha_{11}u)\Delta w_1 + f_1,$$

donde $f_1 = (d_1 + 2\alpha_{11}u)u(a_1 - b_1u - c_1v)$ está acotado en \overline{Q}_T por el Lema 1.1.1 y Lema 3.1.2, $(d_1 + 2\alpha_{11}u) \in C^{\beta, \frac{\beta}{2}}(Q_T)$ por (3.1.2). Por [20, Teorema 9.1, p.341-342] (**Ver Apéndice**), tenemos

$$\|w_1\|_{W_r^{2,1}}(Q_T) < M_3 \quad \text{para } \frac{n+2}{2} < r < \frac{4(n+1)}{(n-2)_+}.$$

Luego se desprende de [20, Lema 3.3, p.80] (**Ver Apéndice**) que

$$w_1 \in C^{1+\beta^*, \frac{(1+\beta^*)}{2}}(\overline{Q}_T), \quad \forall 0 < \beta^* < 1. \quad (3.1.8)$$

Desde que $u = \frac{-d_1 + \sqrt{d_1^2 + 4w_1\alpha_{11}}}{2\alpha_{11}}$, se desprende de (3.1.8) que

$$u \in C^{1+\beta^*, \frac{(1+\beta^*)}{2}}(\overline{Q}_T), \quad \forall 0 < \beta^* < 1. \quad (3.1.9)$$

Luego, reescribimos la ecuación para v

$$v_t = \nabla \cdot [(d_2 + \alpha_{21}u + 2\alpha_{22}v)\nabla v + \alpha_{21}v\nabla u] + f_2(x, t),$$

donde $f_2(x, t) = v(a_2 + b_2u - c_2v)$, u , v y ∇u son todas funciones acotadas debido al lema 1.1.1, Lema 3.1.2 y (3.1.9). Por [20, Teorema 10.1, p.204] (**Ver Apéndice**), tenemos $v \in C^{\sigma, \frac{\sigma}{2}}(\overline{Q}_T)$ con $0 < \sigma < 1$. Ahora, retornamos a la ecuación para u y escribimos

$$u_t = (d_1 + 2\alpha_{11}u)\Delta u + f_3(x, t), \quad (3.1.10)$$

donde $f_3(x, t) = 2\alpha_{11}|\nabla u|^2 + u(a_1 - b_1 u - c_1 v) \in C^{\sigma, \frac{\sigma}{2}}(\overline{Q}_T)$ por (3.1.9) y (3.1).

Entonces la estimativa de Schauder en [20, Teorema 5.3, p.320-321](**Ver Apéndice**)

aplicado a (3.1.10) conducen a

$$u \in C^{2+\sigma^*, \frac{2+\sigma^*}{2}}(\overline{Q}_T) \quad \text{con} \quad \sigma^* = \min\{\lambda, \sigma\}. \quad (3.1.11)$$

Sea $w_2 = (d_2 + \alpha_{21}u + \alpha_{22}v)v$. Entonces w_2 satisface

$$w_{2t} = (d_2 + \alpha_{21}u + 2\alpha_{22}v)\Delta w_2 + f_4(x, t), \quad (3.1.12)$$

donde $f_4(x, t) = (d_2 + \alpha_{21}u + 2\alpha_{22}v)v(a_2 + b_2u - c_2v) + \alpha_{21}vu_t \in C^{\sigma^*, \frac{\sigma^*}{2}}(\overline{Q}_T)$ por (3.1.10) y (3.1.11), $d_2 + \alpha_{21}u + 2\alpha_{22}v \in C^{\sigma, \frac{\sigma}{2}}(\overline{Q}_T)$ por (3.1.9) y (3.1), aplicando la estimativa Schauder a la ecuación (3.1.12), tenemos

$$w_2 \in C^{2+\sigma^*, \frac{2+\sigma^*}{2}}(\overline{Q}_T). \quad (3.1.13)$$

Entonces

$$v = \frac{-(d_2 + \alpha_{21}u) + \sqrt{(d_2 + \alpha_{21}u)^2 + 4w_2\alpha_{22}}}{2\alpha_{22}} \in C^{2+\sigma^*, \frac{2+\sigma^*}{2}}(\overline{Q}_T). \quad (3.1.14)$$

Ahora repetimos el procedimiento haciendo uso de (3.1.11) y (3.1.14) en lugar de (3.1.9) y (3.1), tenemos

$$u, v \in C^{2+\lambda, \frac{2+\lambda}{2}}(\overline{Q}_T). \quad (3.1.15)$$

Finalmente, las estimativas (3.1.11) y (3.1.14) implican que las hipotesis del Teorema 1.0.1 son satisfechas. Por tanto la solución (u, v) existe globalmente en el tiempo.

La demostración del teorema 1.0.2 esta ahora completa. \square

Capítulo 4

Estabilidad

4.1. Definición de la Estabilidad

En matemáticas, la teoría de estabilidad estudia la estabilidad de las soluciones de ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos, es decir, examina como difieren las soluciones bajo pequeñas modificaciones de las condiciones iniciales.

La estabilidad es muy importante en física y ciencias aplicadas, ya que en general en los problemas prácticos las condiciones iniciales nunca se conocen con toda precisión, y la predictibilidad requiere que pequeñas desviaciones iniciales, no generen comportamientos cualitativamente muy diferentes a corto plazo. Cuando la diferencia entre dos soluciones con valores iniciales cercanos puede acotarse mediante la diferencia de valores iniciales se dice que la evolución temporal del sistema presenta estabilidad.

Debido a que toda ecuación diferencial puede reducirse a un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden equivalente, el estudio de la estabilidad de las soluciones de ecuaciones diferenciales puede reducirse al estudio de la estabilidad de los

sistemas de ecuaciones diferenciales.

4.2. Estabilidad según Lyapunov

La estabilidad de puntos de equilibrio generalmente se caracteriza en el sentido de Lyapunov, un matemático e ingeniero ruso que estableció las bases de la teoría que hoy lleva su nombre. Un punto de equilibrio se dice estable si todas las soluciones que se inician en las cercanías del punto de equilibrio permanecen en las cercanías del punto de equilibrio; de otro modo el punto de equilibrio es inestable. Un punto de equilibrio se dice asintóticamente estable si todas las soluciones que se inician en las cercanías del punto de equilibrio no sólo permanecen en las cercanías del punto de equilibrio, sino que además tienden hacia el equilibrio a medida que el tiempo se aproxima al infinito.

Los teoremas de estabilidad de Lyapunov dan condiciones suficientes para estabilidad de puntos de equilibrio. Existen teoremas conversos que establecen que, al menos conceptualmente, en los teoremas de Lyapunov muchas de estas condiciones son también necesarias.

4.3. Teorema de Estabilidad según Lyapunov para un sistema estacionario.

Consideremos el sistema estacionario

$$x' = f(x) \tag{4.3.1}$$

donde $f : D \mapsto R^n$ es localmente Lipschitz desde un dominio $D \subset R^n$ en R^n .

Supongamos que $x_0 \in D$ es un punto de equilibrio de (4.3.1), es decir $f(x_0) = 0$.

Por conveniencia se puede asumir que $x_0 = 0$ (esto no nos hace perder la generalidad ya que podemos definir $y = x - x_0$ y trabajar con la ecuación $y' = g(y)$ donde $g(y) := f(y + x_0)$, que tiene un equilibrio en el origen.)

Definición 20. *El punto de equilibrio $x = 0$ de (4.3.1) es*

- *estable si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon)$ tal que*

$$\|x(0)\| < \delta \text{ entonces } \|x(t)\| < \epsilon, \forall t \geq 0$$

- *inestable si no es estable*
- *asintóticamente estable si es estable y δ puede elegirse tal que*

$$\|x(0)\| < \delta \text{ entonces } \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

Teorema 4.3.1. (*Lyapunov*) Sea $x = 0$ un punto de equilibrio de (4.3.1) y sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un dominio que contiene al origen. Sea $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable tal que

$$V(0) = 0 \text{ y } V(x) > 0 \text{ en } D - \{0\}$$

$$V'(x) \leq 0 \text{ en } D$$

Entonces $x = 0$ es estable. Más aún, si

$$V'(x) < 0 \text{ en } D - \{0\}$$

Entonces $x = 0$ es asintóticamente estable.

Demostración: Ver[23]

4.4. Teorema de Estabilidad según Lyapunov para un sistema no estacionario.

Consideremos el sistema no estacionario

$$x' = f(t, x) \quad (4.4.1)$$

donde $f : [0, \infty) \times D \mapsto R^n$ es seccionalmente continua en t y localmente Lipschitz en x en $[0, \infty) \times D$, y $D \subset R^n$ es un dominio que contiene al origen $x = 0$. El origen es un punto de equilibrio de (4.4.1) para $t = 0$ si

$$f(t, 0) = 0, \forall t \geq 0$$

Un equilibrio en el origen puede ser la traslación de un punto de equilibrio que no está en cero o, más generalmente, la traslación de una solución no nula del sistema. Para ver este último punto, supongamos que $\bar{y}(\tau)$ es una solución del sistema

$$\frac{dy}{d\tau} = g(\tau, y) \quad (4.4.2)$$

definida para todo $\tau \geq a$. El cambio de variables $x = y - \bar{y}(\tau)$; $t = \tau - a$ transforma el sistema en la forma

$$x' = g(t + a, x + \bar{y}(t + a)) - \bar{y}'(t + a) := f(t, x)$$

$$\text{como } \bar{y}'(t + a) = g(t + a, \bar{y}(t + a)), \quad \forall t \geq 0$$

el origen $x = 0$ es un punto de equilibrio del sistema transformado para $t = 0$.

Por lo tanto, examinando la estabilidad del origen como un punto de equilibrio del sistema transformado, determinamos la estabilidad de la solución $\bar{y}(\tau)$ del sistema original. Notar que si $\bar{y}(\tau)$ no es constante, el sistema transformado es no estacionario aunque el sistema original sea estacionario. Por lo tanto, el estudio de estabilidad de soluciones en el sentido de Lyapunov sólo puede hacerse mediante el estudio de la estabilidad de equilibrios de sistemas no estacionarios.

Nos va a interesar definir estabilidad del origen como una propiedad uniforme con respecto al instante inicial.

Definición 21. (*Estabilidad Uniforme*) El punto de equilibrio $x = 0$ de (4.4.1) es

- estable, si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon, t_0)$ tal que

$$\|x(t_0)\| < \delta \text{ entonces } \|x(t)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq t_0 \quad (4.4.3)$$

- uniformemente estable, si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon)$ independiente de t_0 tal que (4.4.3) se satisface.
- inestable, si no es estable.
- asintóticamente estable, si es estable y existe $c = c(t_0)$ tal que $x(t) \mapsto 0$ cuando $t \mapsto \infty$ para todo $\|x(t_0)\| < c$

- *uniformemente asintóticamente estable, si es uniformemente estable y existe $c > 0$ independiente de t_0 tal que para todo $\|x(t_0)\| < c$, $x(t) \mapsto 0$ cuando $t \mapsto \infty$, uniformemente en t_0 ; es decir, para cada $\epsilon > 0$ existe $T = T(\epsilon)$ tal que*

$$\|x(t)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq t_0 + T(\epsilon) \quad \forall \|x(t_0)\| < c$$

4.5. Discusión de la Estabilidad

En esta sección, discutimos la estabilidad asintótica global del punto de equilibrio positivo (\bar{u}, \bar{v}) para (1.0.2), es decir demostrar Teorema 1.0.3.

Demostración del Teorema 1.0.3. Defino la función de Lyapunov :

$$H(u, v) = \int_{\Omega} \left[(u - \bar{u} - \bar{u} \ln \frac{u}{\bar{u}}) + \rho(v - \bar{v} - \bar{v} \ln \frac{v}{\bar{v}}) \right] dx,$$

donde $\rho = (b_2 c_1 + 2b_1 c_2) \bar{b}_2^{-2}$. Obviamente, $H(u, v)$ es nonegativa y $H(u, v) = 0$ si y solamente si $(u, v) = (\bar{u}, \bar{v})$. Por el Teorema 1.0.2, $H(u, v)$ está bien puesto para $t \geq 0$ si (u, v) es solución positiva para el sistema (1.0.2). La derivada en tiempo de $H(u, v)$ para el sistema (1.0.2) satisface

$$\begin{aligned} & \frac{dH(u, v)}{dt} \\ &= \int_{\Omega} \left(\frac{u - \bar{u}}{u} u_t + \rho \frac{v - \bar{v}}{v} v_t \right) dx \\ &= \int_{\Omega} \left\{ \frac{u - \bar{u}}{u} \nabla \cdot [(d_1 + 2\alpha_{11}u) \nabla u] + (u - \bar{u})(a_1 - b_1 u - c_1 v) \right. \\ & \quad \left. + \rho \frac{v - \bar{v}}{v} \nabla \cdot [(d_2 + \alpha_{21}u + 2\alpha_{22}v) \nabla v + \alpha_{21}v \nabla u] + \rho(v - \bar{v})(a_2 + b_2 u - c_2 v) \right\} dx \\ &= - \int_{\Omega} \left[\frac{(d_1 + 2\alpha_{11}u)\bar{u}}{u^2} |\nabla u|^2 + \frac{\rho \alpha_{21} \bar{v}}{v} \nabla u \cdot \nabla v + \frac{\rho(d_2 + \alpha_{21}u + 2\alpha_{22}v)\bar{v}}{v^2} |\nabla v|^2 \right] dx \\ & \quad - \int_{\Omega} [b_1(u - \bar{u})^2 + (c_1 - \rho b_2)(u - \bar{u})(v - \bar{v}) + c_2 \rho(v - \bar{v})^2] dx. \end{aligned}$$

El segundo integrando en la anterior desigualdad es definido positivo por la elección de ρ . Mientras tanto el primer integrando es definido semipositivo si

$$4\rho \bar{u} \bar{v} (d_1 + 2\alpha_{22}u)(d_2 + \alpha_{21}u + 2\alpha_{22}v) > u^2 (\alpha_{21} \bar{v})^2. \quad (4.5.1)$$

Por el Lema 1.1.1 y Teorema 1.0.2, la condición (1.0.4) implica (4.5.1). Por lo tanto, cuando todas las condiciones en el teorema 1.0.3 se satisfacen, existe una constante positiva δ dependiendo de b_1, b_2, c_1 y c_2 tal que

$$\frac{dH(u, v)}{dt} \leq -\delta \int_{\Omega} [(u - \bar{u})^2 + (v - \bar{v})^2] dx. \quad (4.5.2)$$

Para obtener la convergencia uniforme de la solución a (1.0.2), recordamos el siguiente resultado el cual puede ser encontrado en [21] en chino. Aquí presentaremos un bosquejo de la demostración encontrada en ese paper chino.

Lema 4.5.1. *Sean a y b constantes positivas. Suponga que $\varphi, \psi \in C^1[a, +\infty)$, $\psi(t) \geq 0$, y φ es acotada inferiormente. Si $\varphi'(t) \leq -b\psi(t)$ y $\psi'(t) \leq K$ en $[a, +\infty)$, para alguna constante positiva K entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = 0$.*

Demostración. (Por contradicción) Supongamos que existe un $\epsilon_0 > 0$ y una sucesión $\{t_j\}$ con $t_j \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$ tal que

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < \dots < t_i < \dots, \quad t_i - t_{i-1} > 1$$

$$\psi(t_i) > \epsilon_0$$

Sea $\alpha > 0$ suficientemente pequeño tal que $t_{i-1} < t_i - \alpha$ y $\alpha K < \frac{\epsilon_0}{2}$. Usando la desigualdad $\psi'(t) \leq K$ tenemos que $\psi(t_i) - \psi(t) \leq K(t_i - t)$ para $t \in [t_i - \alpha, t_i]$. Entonces $\psi(t_i) \geq \psi(t) + K(t - t_i) > \epsilon_0 - K\alpha > \frac{\epsilon_0}{2}$ para $t \in [t_i - \alpha, t_i]$.

Utilizando la desigualdad anterior y la condición $\varphi'(t) \leq -b\psi(t)$ tenemos

$$\varphi(t) \leq \varphi(a) - b \int_a^t \psi(t) dt \leq \varphi(a) - b \sum_1^N \int_{t_i-a}^{t_i} \psi(t) dt \leq \varphi(a) - \epsilon_0 K N \frac{\alpha}{2} \quad (4.5.3)$$

para $t \geq t_N$. Por lo tanto $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = -\infty$ esto conduce a una contradicción con el supuesto que φ está acotado inferiormente. \square

Usando integracion por partes, la desigualdad de Hölder, Lema 1.1.1, y el Lema 3.1.2, se puede facilmente verificar que $\frac{d}{dt} \int_{\Omega} [(u - \bar{u})^2 + (v - \bar{v})^2] dx$ es acotado por lo anterior. Luego del lema 4.5.1 y la desigualdad de (4.5.2), tenemos

$$\|u(\cdot, t) - \bar{u}\|_{L^\infty(\Omega)} \rightarrow 0, \quad \|v(\cdot, t) - \bar{v}\|_{L^\infty(\Omega)} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty).$$

Es decir, (u, v) converge uniformemente a (\bar{u}, \bar{v}) . Como $H(u, v)$ decrece para $t \geq 0$, es obvio que (\bar{u}, \bar{v}) es asintótico global estable, y la prueba del teorema 1.0.3 es completa. \square

4.6. Gráficos del sistema cross diffusion para n=1

Ejemplo 1

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} [(50 + 0u)u] = u(0,3 - 0,5u - 0,1v) \quad \text{en }] - 4, 4[\times [0, 20[, \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} [(100 + 0,2u + v)v] = v(0,2 + 0,1u - 0,1v) \quad \text{en }] - 4, 4[\times [0, 20[, \\ \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} v(x, t) = 0 \quad \text{en } \{-4, 4\} \\ u(x, 0) = 40 \geq 0, \quad v(x, 0) = 2 \geq 0 \quad \text{en }] - 4, 4[. \end{array} \right. \quad (4.6.1)$$

Codificamos este sistema con sus respectivas ecuaciones y condiciones del Teorema 1.0.3 en el software Mathematica de la Wolfram.

Primero, ingresamos los datos que verifican las condiciones y obtenemos el punto de equilibrio para este caso.

Segundo, codificamos las ecuaciones del sistema anterior y las planteamos para visualizar el comportamiento de u (densidad de las presas) y v (densidad de los depredadores).

Tercero, interpretamos los gráficos, se presentan dos depredadores con cuarenta presas inicialmente, los depredadores tienden a difundirse a la región donde la presa es más abundante en un intervalo de 35 días, en el día 28 las presas se reducen a una y los depredadores tienden a crecer.

Ejemplo 2

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} [(50 + 0u)u] = u(0,3 - 0,5u - 0,1v) \quad \text{en }] - 4, 4[\times [0, 28[, \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} [(100 + 0,2u + v)v] = v(0,2 + 0,1u - 0,1v) \quad \text{en }] - 4, 4[\times [0, 28[, \\ \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} v(x, t) = 0 \quad \text{en } \{-4, 4\} \\ u(x, 0) = 3 \geq 0, \quad v(x, 0) = 8 \geq 0 \quad \text{en }] - 4, 4[. \end{array} \right. \quad (4.6.2)$$

Codificamos este sistema con sus respectivas ecuaciones y condiciones del Teorema 1.0.3 en el software Mathematica de la Wolfram.

Primero, ingresamos los datos que verifican las condiciones y obtenemos el punto de equilibrio para este caso.

Segundo, codificamos las ecuaciones del sistema anterior y las ploteamos para visualizar el comportamiento de u (densidad de las presas) y v (densidad de los depredadores).

Tercero, interpretamos los gráficos, se presentan ocho depredadores con tres presas inicialmente, los depredadores tienden a difundirse a la región donde la presa es más abundante en un intervalo de 28 días, en el día 25 tienden desaparecer las presas y la población de depredadores se reducen a 2.

4.7. Gráficos del sistema cross diffusion para n=2

Ejemplo 3

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} [(0,8 + 0,5u)u] - \frac{\partial^2}{\partial y^2} [(0,8 + 0,5u)u] = u(0,2 - 0,4u - 0,1v) \\ \text{en }] - 3, 3[\times] - 3, 3[\times[0, 15[, \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} [(0,4 + 0,3u + 0,4v)v] - \frac{\partial^2}{\partial y^2} [(0,4 + 0,3u + 0,4v)v] = v(0,2 + 0,1u - 0,1v) \\ \text{en }] - 3, 3[\times] - 3, 3[\times[0, 15[, \\ \frac{\partial}{\partial x} u(x, y, t) = \frac{\partial}{\partial x} v(x, y, t) = \frac{\partial}{\partial y} v(x, y, t) = \frac{\partial}{\partial y} u(x, y, t) = 0 \\ \text{en } x = -3, x = 3, y = -3, y = 3 \\ u(x, y, 0) = 8, \quad v(x, y, 0) = 2 \quad \text{en }] - 3, 3[\times] - 3, 3[. \end{array} \right. \quad (4.7.1)$$

Codificamos este sistema con sus respectivas ecuaciones y condiciones del Teorema 1.0.3 en el software Mathematica de la Wolfram.

Primero, ingresamos los datos que verifican las condiciones y obtenemos el punto de equilibrio para este caso.

Segundo, codificamos las ecuaciones del sistema anterior y las ploteamos para visualizar el comportamiento de u (densidad de las presas) y v (densidad de los depredadores) en un habitat $\Omega =] - 3, 3[\times] - 3, 3[$.

Tercero, interpretamos los gráficos, se presentan dos depredadores con ocho presas inicialmente, los depredadores tienden a difundirse a la región donde la presa es más

abundante en un intervalo de 24 días, en el día 17 la población de presas desaparece y al poco tiempo los depredadores también desaparecen, ya que sin alimento no podrán subsistir.

Codificación del Ejemplo 1

```
(Debug) In[3]:=
a1 = 0.3; b1 = 0.5; c1 = 0.1; a2 = 0.2; b2 = 0.1; c2 = 0.1; d1 = 50; d2 = 100;
m = a1 / b1; w = (b2 * c1 + 2 b1 * c2) / b2^2; a21 = 0.2;
If[-a1 * b2 / b1 * c2 < a2 / c2 && a2 / c2 < a1 / c1 &&
  4 * w * (a1 * c2 - a2 * c1) / (b1 * c2 + b2 * c1) * (a2 * b1 + a1 * b2) / (b1 * c2 + b2 * c1) * d1 * d2 >
  m^2 * a21^2 * (a2 * b1 + a1 * b2)^2 / (b1 * c2 + b2 * c1)^2,
  {(a1 * c2 - a2 * c1) / (b1 * c2 + b2 * c1), (a2 * b1 + a1 * b2) / (b1 * c2 + b2 * c1)}]

{0.16666666666666655`, 2.1666666666666665`} PUNTO DE EQUILIBRIO
```

```
sol =
NDSolve[
  { $\partial_t u[t, x] - \partial_{x,x}((50 + 0 u[t, x]) u[t, x]) ==$ 
     $u[t, x] (0.3 - 0.5 u[t, x] - 0.1 v[t, x]),$ 
     $\partial_t v[t, x] -$ 
     $\partial_{x,x}((100 + 0.2 u[t, x] + v[t, x]) v[t, x]) ==$ 
     $v[t, x] (0.2 + 0.1 u[t, x] - 0.1 v[t, x]),$ 
    Derivative[0, 1][u][t, -4] == 0,
    Derivative[0, 1][v][t, 4] == 0, u[0, x] == 40,
    v[0, x] == 2}, {u, v}, {t, 0, 20}, {x, -4, 4}]
```

Gráficos del Ejemplo 1

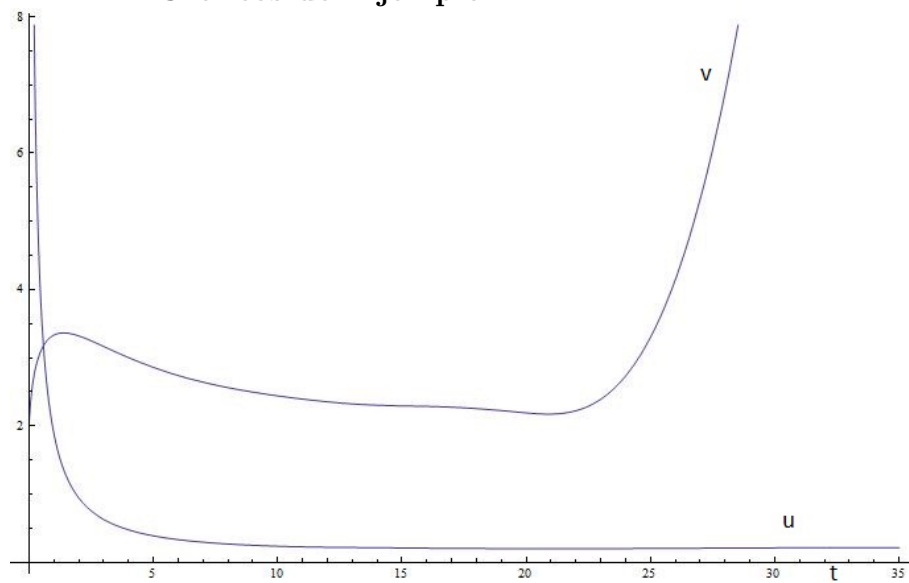


Figura 4.1: `Plot[First[u[t, 0], v[t, 0] /. sol], t, 0, 35]`

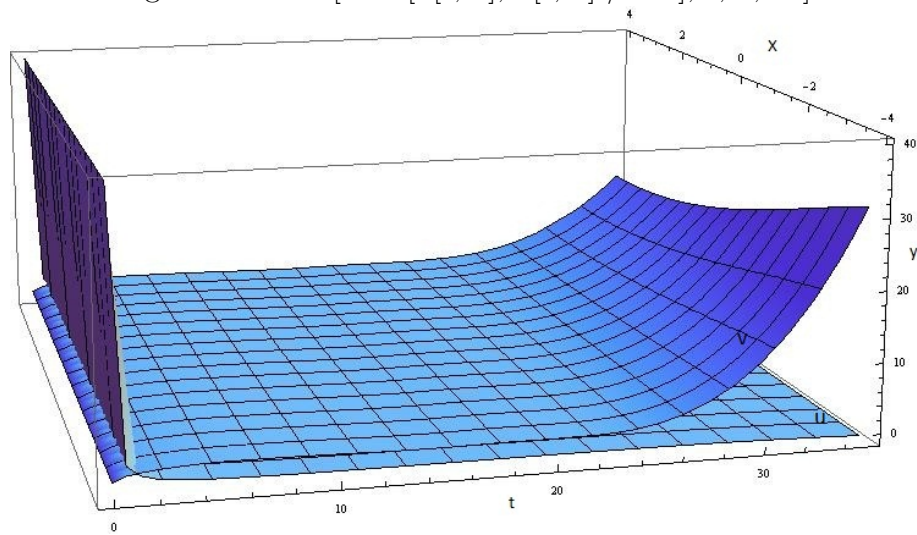


Figura 4.2: `Plot3D[Evaluate[{u[t, x], v[t, x]} /. First[sol]], {t, 0, 35}, {x, -4, 4}]`

Codificación del Ejemplo 2

(Debug) In[1]:=

```
a1 = 0.3; b1 = 0.5; c1 = 0.1; a2 = 0.2; b2 = 0.1; c2 = 0.1; d1 = 50; d2 = 100; m = 5;
w = (b2 * c1 + 2 b1 * c2) / b2^2; a21 = 0.2;
If[-a1 * b2 / b1 * c2 < a2 / c2 && a2 / c2 < a1 / c1 &&
  4 * w * (a1 * c2 - a2 * c1) / (b1 * c2 + b2 * c1) * (a2 * b1 + a1 * b2) / (b1 * c2 + b2 * c1) * d1 * d2 >
  m^2 * a21^2 * (a2 * b1 + a1 * b2)^2 / (b1 * c2 + b2 * c1)^2,
  {(a1 * c2 - a2 * c1) / (b1 * c2 + b2 * c1), (a2 * b1 + a1 * b2) / (b1 * c2 + b2 * c1)}]

{0.16666666666666655`, 2.1666666666666665`} PUNTO DE EQUILIBRIO
```

(Debug) In[9]:=

```
sol =
NDSolve[
  {∂t u[t, x] - ∂x,x ((50 + 0 u[t, x]) u[t, x]) ==
    u[t, x] (0.3 - 0.5 u[t, x] - 0.1 v[t, x]),
  ∂t v[t, x] - ∂x,x ((100 + 0.2 u[t, x] + v[t, x]) v[t, x]) ==
    v[t, x] (0.2 + 0.1 u[t, x] - 0.1 v[t, x]), Derivative[0, 1][u][t, -4] == 0,
  Derivative[0, 1][v][t, 4] == 0, u[0, x] == 3, v[0, x] == 8}, {u, v},
  {t, 0, 20}, {x, -4, 4}]
```

Gráficos del Ejemplo 2

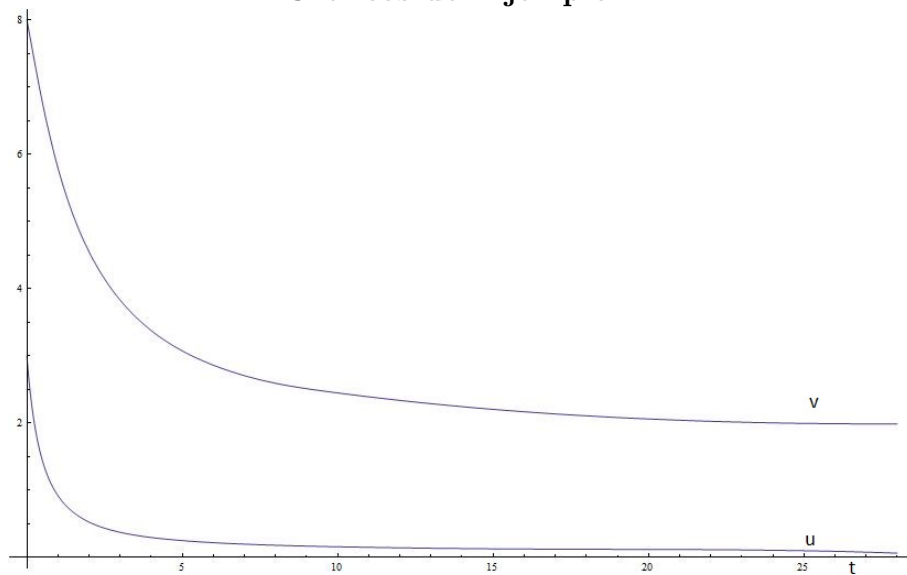


Figura 4.3: $\text{Plot}[\text{First}[\{u[t, 0], v[t, 0]\} /. \text{sol}], \{t, 0, 28\}]$

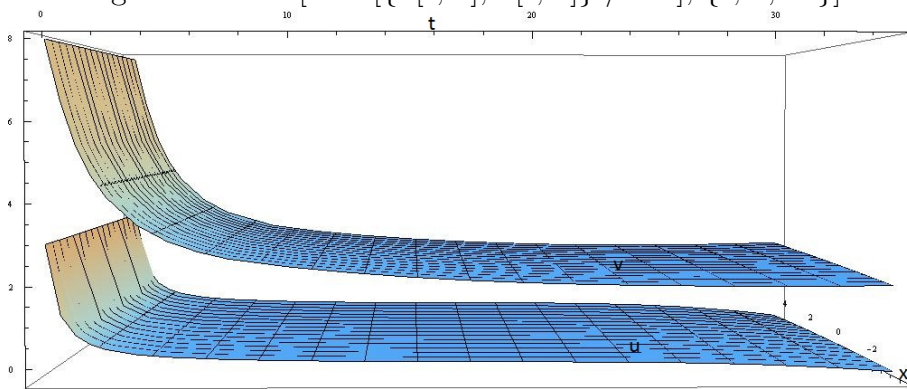


Figura 4.4: $\text{Plot3D}[\text{Evaluate}[\{u[t, x], v[t, x]\} /. \text{First}[\text{sol}], \{t, 0, 28\}, \{x, -4, 4\}]$

Codificación del Ejemplo 3

```
(Debug) In[5]:=
a1 = 0.2; b1 = 0.4; c1 = 0.1; a2 = 0.1; b2 = 0.1; c2 = 0.3; d1 = 0.8; d2 = 0.4;
m = a1 / b1; w = (b2 * c1 + 2 b1 * c2) / b2^2; a21 = 0.3;
If[-a1 * b2 / b1 * c2 < a2 / c2 && a2 / c2 < a1 / c1 &&
  4 * w * (a1 * c2 - a2 * c1) / (b1 * c2 + b2 * c1) * (a2 * b1 + a1 * b2) / (b1 * c2 + b2 * c1) * d1 * d2 >
  m^2 * a21^2 * (a2 * b1 + a1 * b2)^2 / (b1 * c2 + b2 * c1)^2,
  {(a1 * c2 - a2 * c1) / (b1 * c2 + b2 * c1), (a2 * b1 + a1 * b2) / (b1 * c2 + b2 * c1)}]

{0.3846153846153845`, 0.46153846153846156`} PUNTO DE EQUILIBRIO

sol =
NDSolve[
  {∂t u[t, x, y] - ∂x,x((0.8 + 0.5 u[t, x, y]) u[t, x, y]) -
    ∂y,y((0.8 + 0.5 u[t, x, y]) u[t, x, y]) ==
    u[t, x, y] (0.2 - 0.4 u[t, x, y] - 0.1 v[t, x, y]),
  ∂t v[t, x, y] - ∂x,x((0.4 + 0.3 u[t, x, y] + 0.4 v[t, x, y]) v[t, x, y]) -
    ∂y,y((0.4 + 0.3 u[t, x, y] + 0.4 v[t, x, y]) v[t, x, y]) ==
    v[t, x, y] (0.1 + 0.1 u[t, x, y] - 0.3 v[t, x, y]),
  Derivative[0, 1, 0][u][t, 3, y] == 0, Derivative[0, 1, 0][u][t, -3, y] == 0,
  Derivative[0, 0, 1][u][t, x, 3] == 0, Derivative[0, 0, 1][u][t, x, -3] == 0,
  Derivative[0, 1, 0][v][t, 3, y] == 0, Derivative[0, 1, 0][v][t, -3, y] == 0,
  Derivative[0, 0, 1][v][t, x, 3] == 0, Derivative[0, 0, 1][v][t, x, -3] == 0,
  u[0, x, y] == 8, v[0, x, y] == 2}, {u, v}, {t, 0, 15}, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}]
```

Gráficos del Ejemplo 3

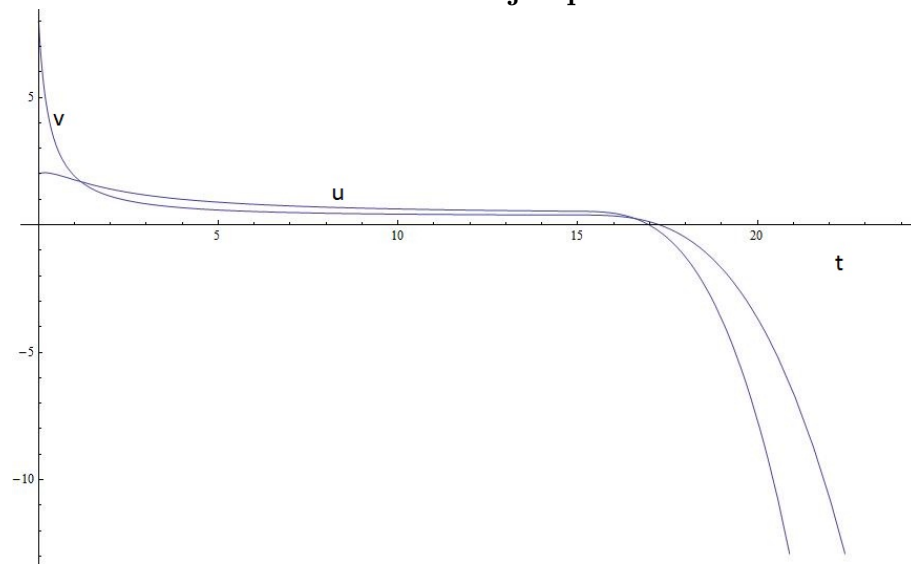


Figura 4.5: $\text{Plot}[\text{First}[\{u[t, 0, 0], v[t, 0, 0]\} /. \text{sol}], \{t, 0, 24\}]$

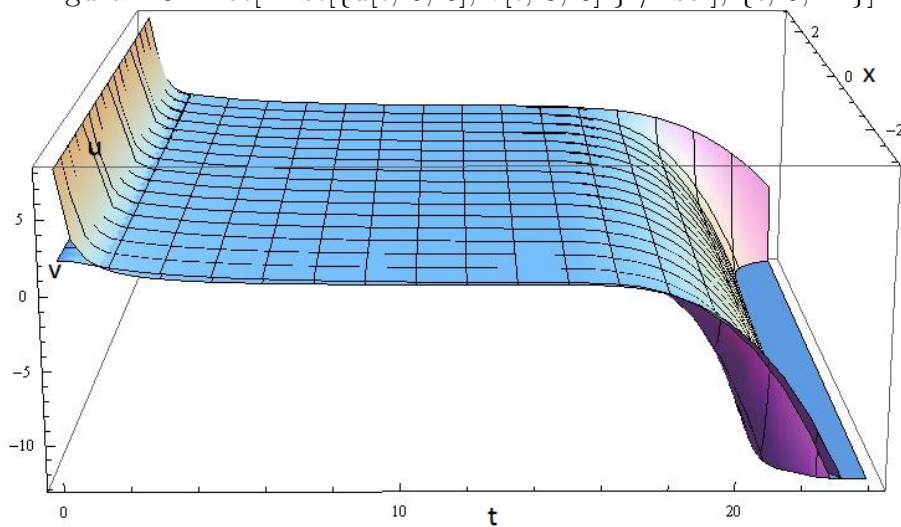


Figura 4.6: $\text{Plot3D}[\text{First}[\{u[t, x, 0], v[t, x, 0]\} /. \text{sol}], \{t, 0, 24\}, \{x, -3, 3\}]$

Capítulo 5

Conclusiones

En esta tesis hemos vinculado Ecología y Matemática estudiando un sistema no lineal parabólico fuertemente acoplado el cual presenta cross diffusion con funciones de reacción tipo depredador presa.

Este trabajo, muestra la utilidad del resultado del teorema de Amann para garantizar la existencia única de soluciones del sistema no lineal con cross diffusion. Posteriormente analizamos las L^r estimativas de la solución v usando los lemas previos y algunos teoremas de Ladyzenskaja.

Luego demostramos el teorema principal usando la estimativa de Schauder, los resultados de los teoremas de Ladyzenskaja, y las hipótesis del teorema de Amann para concluir que (u, v) existe globalmente en el tiempo.

Finalmente hemos analizado la estabilidad del sistema usando el metodo de Lyapunov. Además mostramos el comportamiento de las soluciones para el caso $n=1,2$ usando el software Mathematica versión 7 de la Wolfram.

Una investigación interesante a futuro sera utilizar el teorema de Amann para tres o más niveles tróficos.

Apéndice A

APÉNDICE

A.1. Fórmula de Green

Sea $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$. Entonces

$$\int_{\Omega} \Delta u \, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} \, dS \quad (\text{A.1.1})$$

A.2. Lema de Comparación

Considere la ecuación diferencial escalar:

$$\dot{u} = f(t, u), \quad u(t_0) = u_0 \quad (\text{A.2.1})$$

donde $f(t, u)$ es continua en t y localmente lipchitz en u , para todo $t \geq 0$ y todo $u \in J \subseteq \mathbb{R}$. Sea $[t_0, T)$ (T puede ser infinito) ser el intervalo *máximal* de existencia de la *solución* $u(t)$, y suponga $u(t) \in J$ para todo $t \in [t_0, T)$. Sea $v(t)$ una función continua cuya derivada lateral por la derecha satisface la desigualdad diferencial por la derecha $D^+v(t)$ satisface la desigualdad diferencial

$$D^+v(t) \leq f(t, v(t)), \quad v(t_0) \leq u_0 \quad (\text{A.2.2})$$

con $v(t) \in J$ para todo $t \in [t_o, T)$. Entonces $v(t) \leq u(t)$ para todo $t \in [t_o, T)$.

La demostración del anterior lema puede ser encontrado en [23, Capítulo2].

A.3. Lema

Sea y una función no negativa satisfaciendo

$$\frac{dy}{dt} = K_0 + Ay - By^q \quad (A.3.1)$$

$$y(0) = y_0$$

donde y_0, K_0, A, B son constantes positivas, $q > 1$. Entonces existe una constante positiva K tal que

$$y(t) \leq K \quad (A.3.2)$$

Demostración Sean A, B constantes fijas positivas y $q > 1$, nosotros consideramos el siguiente sistema :

$$\frac{dZ^+}{dt} = K_0 + AZ^+ \quad (A.3.3)$$

$$Z^+(0) = y_0$$

y el siguiente sistema :

$$\frac{dZ^-}{dt} = -(K_0 + AZ^-) \quad (A.3.4)$$

$$Z^-(0) = y_0$$

Luego usamos el Lema de comparación en (A.3.2) y (A.3.3). Nuevamente comparamos (A.3.2) y (A.3.4) y obtenemos

$$Z^-(t) \leq y(t) \leq Z^+(t) \quad t \in (0, \infty) \quad (A.3.5)$$

Sea $f(y) = K_0 + Ay - By^q$. $f(y)=0$ logra su máximo en $y = Y_{max}$.

Sea $K = \max\{y_0, Y_{max}\}$. Obviamente, $Z(t) = K$ es una solución de (A.3.1) por el principio de comparación nuevamente tenemos

$$y \leq K \tag{A.3.6}$$

A.4. Teorema 9.1

Sea $q > 1$. Suponga que todos los coeficientes a_{ij} del operador \mathfrak{L} son funciones acotadas y continuas en Q_T , mientras los coeficientes a_i y a tienen normas finitas $\|a_i\|_{r,Q_T}^{(loc)}$ y $\|a\|_{s,Q_T}^{(loc)}$ respectivamente, con

$$r = \begin{cases} \max(q, n+2) & \text{para } q \neq n+2 \\ n+2+\epsilon & \text{para } q = n+2 \end{cases}$$

$$s = \begin{cases} \max(q, \frac{n+2}{2}) & \text{para } q \neq \frac{n+2}{2} \\ \frac{n+2}{2} + \epsilon & \text{para } q = \frac{n+2}{2} \end{cases}$$

y sea ϵ un número arbitrario pequeño positivo. Suponga, además, que las cantidades $\|a_i\|_{r,Q_{t,t+r}}^{(loc)}$ y $\|a\|_{s,Q_{t,t+r}}^{(loc)}$ tiende a cero para $r \rightarrow 0$. Sea $S \in O^2$. Entonces para cualquier $f \in L^q(Q_t)$, $\phi \in W_q^{2-\frac{2}{q}}(\Omega)$ y $\Phi \in W_q^{2-\frac{1}{q}, 1-\frac{1}{2q}}(S_T)$ con $q \neq 3$, satisfaciendo el caso $q > \frac{3}{2}$ la condición de compatibilidad de orden cero

$$\phi|_S = \Phi|_{t=0},$$

en

$$\begin{cases} \mathfrak{L}(x, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t})u(x, t) = f(x, t) \\ u|_{t=0} = \phi(x), \quad u|_{S_T} = \Phi(x, t) \end{cases}$$

tiene una única solución $u \in W_q^{2,1}(Q_T)$. Este satisface la estimativa

$$\|u\| \leq c(\|f\|_{q,Q_T} + \|\varphi\|_{q,\Omega}^{(2-\frac{2}{q})} + \|\Phi\|_{q,S_T}^{(2-\frac{1}{q})} + T^{-1+\frac{1}{2q}}\|\Phi\|_{q,S_T})$$

Demostración: Ver [20]

A.5. Lema 4.1

Supongamos que existe $r_1 > \max\{\frac{n+2}{2}, 3\}$ y una constante positiva $C_{r_1, T}$ tal que $\|u\|_{L^{r_1}(Q_T)} \leq C_{r_1, T}$ entonces, u está en $L^r(Q_T)$ para $r > 1$

Demostración: Ver [9]

A.6. Teorema 10.1

Suponga que $u(x, t)$ es una solución generalizada de $V_2^{1,0}(Q_T)$ de la ecuación

$$\mathfrak{L}u \equiv u_t - \mathfrak{M}u = \frac{\partial f_i}{\partial x_i} - f ,$$

donde

$$\mathfrak{M}u = \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}(x, t)u_{x_i} + a_i(x, t)u) - b_i(x, t)u_{x_i} - a(x, t)u$$

discontinua, no diferenciable y no acotada, donde los coeficientes satisfacen la condición de parabolicidad uniforme,

$$\nu \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \leq a_{ij}(x, t)\xi_i\xi_j \leq \mu \sum_{i=1}^n \xi_i^2 ,$$

ν, μ son constantes positivas y satisfacen

$$\|\sum_{i=1}^n a_i^2; \sum_{i=1}^n b_i^2; \sum_{i=1}^n f_i^2; a; f\|_{q, r, Q_T} \leq \mu_1$$

donde q, r son números arbitrarios positivos que satisfacen las condiciones

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} + \frac{n}{2q} = 1 - \chi_1 \\ con \\ q \in [\frac{n}{2(1-\chi_1)}, \infty], r \in [\frac{1}{1-\chi_1}, \infty] \quad \text{para } n \geq 2, \quad 0 < \chi_1 < 1 \\ q \in [1, \infty], r \in [\frac{1}{1-\chi_1}, \frac{2}{1-2\chi_1}], \quad \text{para } n = 1, \quad 0 < \chi_1 < \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

y suponga que $\text{varaimax}_{Q_T}|u| = M$. Entonces $u \in H^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(Q_T)$, y su norma $|u|_{Q'}^\alpha$, para cualquier $Q' \subset Q_T$ está separado de Γ_T por una distancia positiva d , es estimado por una constante dependiendo solamente de $n, M, \nu, \mu, \mu_1, q, r$ y la distancia d . El exponente $\alpha > 0$ es determinado solamente por los números n, ν, μ, q, r .

Demostración: Ver [20]

A.7. Lema 3.3

Sea Ω un dominio que satisface la condición de un cono \mathfrak{K} . Entonces para cualquier función $u(x, t)$ de $W_q^{2l, l}$ 1 integrable tenemos la desigualdad

$$\|D_t^r D_x^s\|_{L^p(Q_T)} \leq c_3 \delta^{2l-2r-s-(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})(n+2)} \sum_{2r+s=2l} \|D_t^r D_x^s u\|_{L^q(Q_T)} + c_4 \delta^{-[2r-s+(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})(n+2)]} \|u\|_{L^q(Q_T)}$$

esta es válida para las siguientes condiciones $p \geq q$, $2l - 2r - s - (\frac{1}{q} - \frac{1}{p})(n+2) \geq 0$.

Además, si $2l - 2r - s - \frac{(n+2)}{q} > 0$, entonces para $0 \leq \lambda < 2l - 2r - s - \frac{(n+2)}{q}$ tenemos

otra desigualdad

$$\langle D_t^r D_x^s \rangle_{Q_T}^{(\lambda)} \leq c_5 \delta^{2l-2r-s-\frac{n+2}{q}-\lambda} \sum_{2r+s=2l} \|D_t^r D_x^s u\|_{L^q(Q_T)} + c_6 \delta^{-(2r+s+\frac{n+2}{q}+\lambda)} \|u\|_{L^q(Q_T)}$$

con las siguientes condiciones, (para $2l - 2r - s - \frac{n+2}{q} - \lambda$ no integrable, esta desigualdad es también válida para $\lambda = 2l - 2r - s - \frac{n+2}{q}$). La constante δ aquí debe

satisfacer la condición

$$0 < \delta < \min\{d; \sqrt{T}\}$$

y las constantes c_3, c_4, c_5, c_6 dependen de l, r, s, n, q y del ángulo en el vértice del cono \mathfrak{K} .

Demostración: Ver [20]

A.8. Teorema 5.3

Suponga $l > 0$ es un número no integrable, $S \in H^{l+2}$, los coeficientes del operador \mathfrak{L} pertenecen a $H^{l, \frac{l}{2}}(\overline{Q}_T)$, donde $b_i, b \in H^{l+1, \frac{l}{2} + \frac{1}{2}}(\overline{S}_T)$ entonces para cualquier $f \in H^{l, \frac{l}{2}}(\overline{Q}_T)$, $\phi \in H^{l+2}(\overline{\Omega})$, $\Phi \in H^{l+1, \frac{(l+1)}{2}}(\overline{S}_T)$ satisfaciendo las condiciones de compatibilidad de orden $[(\frac{l+1}{2})]$, del siguiente sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{L}(x, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t})u(x, t) = f(x, t), \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \\ \mathfrak{B}(x, t, \frac{\partial}{\partial x})u|_{S_T} \equiv \sum_{i=1}^n b_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + b(x, t)u|_{S_T} = \Phi(x, t) \end{array} \right.$$

este tiene una única solución de la clase $H^{l+2, \frac{l}{2} + 1}(\overline{Q}_T)$ con

$$|u|_Q^{l+2} \leq c(|f|_Q^{(l)} + |\varphi|_\Omega^{(l+2)} + |\Phi|_{S_T}^{(l+1)})$$

Demostración: Ver [20]

Bibliografia

- [1] Shigesada K.Kawasaki E.Teramoto, *Spatial segregation of interacting species*, J. Theor. Biology, 79(1979), 83-99
- [2] Y. Lou, W. Ni, Y. Wu, *On the global existence of a cross-diffusion system*, Discrete Contin. Dynam. Systems, 4(1998), 193-203.
- [3] Y. Li, C. Zhao, *Global existence of solutions to a cross-diffusion system in higher dimensional domains*, Discrete Contin. Dynam. Systems, 12(2005), 193-203.
- [4] Seong-A Shim, *Uniform boundedness and convergence of solutions to the systems with cross-diffusion dominated by self-diffusion*, Nonlinear Analysis: RWA, 4(2003), 65-86.
- [5] Y. S. Choi, R. Lui, Y. Yamada, *Existence of global solutions for the Shigesada-Kawasaki-Teramoto model with strongly coupled cross-diffusion*, Discrete Contin. Dynam. Systems, 9(2003), 1193-1200.
- [6] Y. S. Choi, R. Lui, Y. Yamada, *Existence of global solutions for the Shigesada-Kawasaki-Teramoto model with strongly coupled cross-diffusion*, Discrete Contin. Dynam. Systems, 10(2004), 719-730.
- [7] D. Le, T. Nguyen, *Global existence for a class of triangular parabolic system on domains of arbitrary dimension*, Proceedings of AMS, 7(2005), 1985-1992.

- [8] P. V. Tuoc, *Global existence of solutions to Shigesada-Kawasaki-Teramoto cross-diffusion system on domains of arbitrary dimensions*, Proceedings of AMS, 135(2007), 3933-3941.
- [9] P. V. Tuoc, *On global existence of solutions to a cross-diffusion system*, IMA Preprint Series 2149.
- [10] K. Kuto, Y. Yamada, *Multiple coexistence states for a prey-predator system with cross-diffusion*, J. Differential Equations, 197(2004), 315-348.
- [11] E. Ahmed, A. S. Hegazi, A. S. Elgazzar, *On persistence and stability of some biological systems with cross diffusion*, Adv. Complex Syst, 7(2004), 65-76.
- [12] K. Kuto, *Stability of steady-state solutions to a prey-predator system with cross-diffusion*, J. Differential Equations, 197(2004), 293-314.
- [13] K. Nakashima, Y. Yamada, *Positive steady states for prey-predator models with cross-diffusion*, Adv. Differential Equations, 1(1996), 1099-1122.
- [14] K. Ryu, I. Ahn, *Positive steady-states for two interacting species models with linear self-cross diffusions*, Discrete Contin. Dynam. Systems, 9(2003), 1049-1061.
- [15] H. Amann, *Dynamic theory of quasilinear parabolic equations: Abstract evolution equations*, Nonlinear Analysis, 12(1988), 859-919.

- [16] H. Amann, *Dynamic theory of quasilinear parabolic equations: Reaction-diffusion*, Diff. Int. Eqs, 3(1990), 13-75.
- [17] H. Amann, *Dynamic theory of quasilinear parabolic equations: Global existence*, Math. Z., 202(1989), 219-250.
- [18] Seong-A Shim, *Long-time properties of prey-predator system with cross-diffusion*, Commum. Korean Math. Soc. 21(2006), 293-320.
- [19] Seong-A Shim, *Global existence of solutions to the prey-predator system with a single cross-diffusion*, Bull. Korean Math. Soc. 43(2006), 443-459.
- [20] O. A. Ladyzenskaja, V. A. Solonnikov, N. N. Ural'ceva, *Linear and quasilinear equations of parabolic type*, Translations of Mathematical Monographs, 23, AMS, 1968.
- [21] M. X. Wang, *Nonlinear Parabolic Equation of Parabolic Type*. Science Press, Beijing, 1993 (in Chinese).
- [22] Shenghu Xu, *Existence of Global solutions for a predator -prey model with cross diffusion*, International Journal of Biomathematics, Volume 3 Issue:2(2010), pp 161-172.
- [23] Hassan K. Khalil, *Nonlinear systems*, Prentice Hall, Second Edition, 1996.

- [24] Lawrence C. Evans, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, volumen 19, 1998.
- [25] Haim Brezis, *Functional Analysis Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2011.
- [26] Masaaki Morisita, *Physiol. Ecol.*, Japan 5: 1, 1952 (In Japanese with English summary).